

数学計算問題における誤答特徴分析の試み — 微分積分学の問題を例に —

Attempt to Analyze the Characteristics of Incorrect Answers in Mathematical Calculation Problems — Using Differential and Integral Calculus Problems as an Example —

渡邊 聡真*1, 宮崎 佳典*2
Souma Watanabe*1, Yoshinori Miyazaki*2

*1 静岡大学情報学部情報科学科
*1 Faculty of Informatics, Shizuoka University
*2 静岡大学大学院情報学領域
*2 College of Informatics, Shizuoka University
Email: dubiancongzhen@gmail.com

あらまし: 数学計算問題を学習者に解かせたのち, それらの誤答からその特徴分析の試みを行った. なお, 今回はその数学計算問題の例として, 大学初年次程度における一変数の微分積分学の学習内容より, 12題の微分に関する問題を出題した.

キーワード: 数学計算問題, 誤答, 微分積分学

1. 誤答特徴分析の概要

本研究では, まず, 某国立大学の情報系学部生計101名に合計12問の微分に関する問題を2度の授業に分け, 解いてもらった. これらはHW1, HW2とまとめられ, HW1に6問, HW2に6問という形になっている. HW1, HW2の問題の一例を示したものが以下の表1である. そして, HW1, HW2に対する学習者の誤答を集め, 正答と比較をして間違いの原因についてIDを付与していく(表2~4). 学習者の解答, 正答, 誤答IDをまとめる作業を終了次第, 学習者ごと, 問題ごと, 全体の3つの粒度に分けた. この集計にはプログラムを作成した.

表1 各問題の例

	-1	-2	-3	-4	-5	-6
1	$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$	$\frac{d}{dx}(e^{-x}) = -e^{-x}$	$\frac{d}{dx}((9-x+8) \cdot (x^2+2)) = (9-x+8) \cdot 2x + 2(x^2+2)$	$\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{(x-1)^2}\right) = \frac{1 \cdot (x-1)^2 - x \cdot 2(x-1)}{(x-1)^4}$	$\frac{d}{dx}(x \cdot \ln(x)) = x \cdot \frac{1}{x} + \ln(x)$	$\frac{d}{dx}(\sqrt{9-x^2+17-x+18}) = \frac{-2x}{2\sqrt{9-x^2+17-x+18}} - \frac{1}{2\sqrt{9-x^2+17-x+18}}$
2	$\frac{d}{dx}(\sin(x^2+x)) = 2x \cos(x^2+x) + \cos(x^2+x)$	$\frac{d}{dx}(\sin^2(x)) = 2 \sin(x) \cos(x)$	$\frac{d}{dx}(e^{9-x} \cdot \sin(9-x)) = -e^{9-x} \sin(9-x) + e^{9-x} \cos(9-x)$	$\frac{d}{dx}((e^x+4-z)^2) = 2(e^x+4-z) \cdot (e^x-1)$	$\frac{d}{dx}(\cos^2(x^2+1)) = -2 \cos(x^2+1) \sin(x^2+1) \cdot 2x$	$\frac{d}{dx}(\ln^2(x+1)) = 2 \ln(x+1) \cdot \frac{1}{x+1}$

表2 誤答IDの大別

1 表記ミス
2 微分のミス (簡単な微分を間違えている)
3 微分方法が違う
4 未回答
5 前の問題を答える
6 計算ミス

表3 誤答IDの詳細(1)

1-1-1 指数を前に出しているが, 値が違う	1-4-1 分子の微分中に計算ミス
1-1-2 指数を前に出していない	1-4-2 分母のみの微分方法が違う
1-1-3 前に出す数字と指数が逆	1-4-3 約分していない
1-1-4 指数を忘れている	1-4-4 分子のみの微分方法が違う
1-1-5 積分している	1-4-5 式をまとめていない
1-1-6 指数の値を半分している	1-6-1 (1/2)をかけるのを忘れている
1-2-1 指数が違う	1-6-2 $\sqrt{\quad}$ の中身を微分したものを外に出していない
1-2-2 前に出す数字と指数が違う	1-6-3 $\sqrt{\quad}$ がなくなっている
1-3-1 指数が違う	1-6-4 $\sqrt{\quad}$ の外に出す数値が違う
1-3-2 微分を一部忘れている	1-6-5 $\sqrt{\quad}$ の中に1/2をかけている
	1-6-6 $\sqrt{\quad}$ の中身が微分されている

表4 誤答IDの詳細(2)

2-1-1 $f(x) \cdot g(x)$ の微分をしている	2-5-1 係数をかけ忘れている
2-1-2 微分の時-を付けている	2-5-2 -を忘れ忘れている
2-1-3 \sin の中身を微分して外に出していない	2-5-3 前に出す係数が違う
2-1-4 $\sin(x^2+x)$ が残っている	2-5-4 同じ数字を2回出している
2-2-1 係数の付け忘れ, 係数が違う	2-5-5 \sin を出していない
2-2-2 指数の部分が違う	2-5-6 \cos の中身の微分ができていない
2-2-3 $\cos(x)$ が違う	2-5-7 指数が違う
2-2-4 -を付けている	2-6-1 x の係数かけ忘れ
2-3-1 $f(x) \cdot g(x)$ の微分ができていない	2-6-2 分数になる部分出していない
2-3-2 くっつけている	2-6-3 分数の部分の数字が違う
2-4-1 $e^{1/x}$ の微分が違う	2-6-4 \log の指数が違う
2-4-2 指数を忘れている, 指数が違う	2-6-5 係数が違う
2-4-3 係数が違う	2-6-6 \log が消えている
2-4-4 微分していないところが一部ある	

2. 誤答特徴分析

2の手法で行った誤答特徴分析の結果は表5~6で示される. この2つは全問題に共通している.

表5 HW1の集計結果 表6 HW2の集計結果

hw1	hw2
内容	内容
表記ミス	表現ミス
簡単な微分を間違える	簡単な微分を間違える
微分方法が違う	微分方法が違う
未回答	未回答
計算ミス	計算ミス
前の問題を解く	前の問題を解く

間違いが目立つのは「微分方法が違う」と「表記ミス」である. HW1とHW2の表記ミスの総数の割合はどちらも変化していない. キーボードで自ら打ち込むと, 式の構造を理解しにくく間違いにつながっていると考えた. また, HW2のほうが計算ミスがHW1より減っていることが分かる. HW1-1~HW2-6の間違いの内訳を表7~8に示す. 表記ミスが多くなっているのはHW1-6, HW2-3, HW2-4, HW2-6である. 共通するのは問題の関数が複雑であると言えよう. HW1-1,1-2では問題が単純である微分であるので比較的错误が少ない. HW1-3では和の微分であるので, 微分自体に困るというより, 計算ミス, 表記ミ

スが増えるようになってきている。間違いの多いものが HW1-4, HW1-6 の2つになっている。「微分方法が違う」という間違いは HW1-4 が最も多い。また、このことが 1-4-4 の「指数を忘れている」という間違いにもつながっていると考えた。HW1-5 では「表記ミス」, 「微分方法が違う」の間違いがほとんどを占めている。HW2-1 は間違いの数が HW2 の中で最も少なくなっている。HW2-2 では HW2-1 と間違いの散らばり具合が似ているが、間違い総数に差が出ているのは、2-2-2 の「指数の数値が違う」原因である。この問題は HW2-1 と同じような $\sin()$ の問題であるが HW2-2 は $\sin()$ の全体の累乗になっていて指数が間違えてしまったと推察する。HW2-3 では表記ミスが最も多く、半分以下を占めている。これは解答が長くなり、打鍵が難しかったと考えた。HW2-4 では最も間違いが多くなっている問題であり、その間違いの半分以上は 2-4-1 である。 $e^{(1/x)}$ となり、指数が分数になったことでこの間違いが一気に増えたと考えた。HW2-5 は HW2-1 と HW2-2 を組み合わせたような問題になっているが間違いの数が増えている。間違いの約 4 割を占めているのがマイナスの付け忘れで 23 回ある。仮に問題が $\cos()$ ではなく $\sin()$ であれば間違いの合計は 35 回となり、HW2-2 と同じような数になる。また、全学習者の HW2-1, HW2-2, HW2-5 の正誤をまとめた (表 9)。

表 7 HW1 の誤答内訳詳細

HW1-1	HW1-2	HW1-3	HW1-4	HW1-5	HW1-6
1	0	1	1	4	4
2	0	2	0	2	0
3	1	3	0	3	4
4	0	4	0	4	2
5	0	5	0	5	1
6	0	6	1	6	4
1-1-1	1	1-2-1	9	1-3-1	5
1-1-2	1	1-2-2	2	1-3-2	3
1-1-3	2	合計	13	合計	23
1-1-4	2				
1-1-5	1				
1-1-6	1				
合計	9				
HW1-1	HW1-2	HW1-3	HW1-4	HW1-5	HW1-6
1	0	1	6	1	19
2	0	2	0	2	0
3	15	3	5	3	8
4	3	4	1	4	1
5	0	5	0	5	4
6	4	6	1	6	7
1-4-1	5	合計	13	1-6-1	2
1-4-2	7			1-6-2	4
1-4-3	4			1-6-3	13
1-4-4	17			1-6-4	6
1-4-5	3			1-6-5	2
合計	58			1-6-6	5
				合計	71

表 8 HW2 の誤答内訳詳細

HW2-1	HW2-2	HW2-3	HW2-4	HW2-5	HW2-6
1	4	1	5	1	17
2	2	2	0	2	0
3	3	3	4	3	8
4	0	4	1	4	0
5	0	5	0	5	5
6	0	6	0	6	0
2-1-1	3	2-2-1	4	2-3-1	7
2-1-2	1	2-2-2	7	2-3-2	2
2-1-3	4	2-2-3	2	合計	39
2-1-4	1	2-2-4	1		
合計	18	合計	24		
HW2-1	HW2-2	HW2-3	HW2-4	HW2-5	HW2-6
1	14	1	6	1	18
2	0	2	0	2	0
3	25	3	5	3	10
4	5	4	0	4	5
5	6	5	0	5	1
6	2	6	1	6	1
2-4-1	77	2-5-1	7	2-6-1	10
2-4-2	10	2-5-2	23	2-6-2	3
2-4-3	5	2-5-3	4	2-6-3	7
2-4-4	2	2-5-4	2	2-6-4	1
合計	146	2-5-5	4	2-6-5	1
		2-5-6	2	2-6-6	9
		2-5-7	3	合計	66
		合計	57		

表 9 HW2-1, HW2-2, HW2-5 の正誤

2-1	2-2	2-5	合計
○	○	○	48
○	×	○	11
×	○	○	6
×	×	○	0
○	○	×	21
○	×	×	6
×	○	×	7
×	×	×	2

まず、HW2-5 の正解者は HW2-1, HW2-2 のどちらかを必ず正解している。HW2-1, 2-2 のどちらかで間違えても HW2-5 で正解することができている人は 17 名いる。3 つの内どれかを間違えている人は 53 人で全体の約 3 割である。次に HW2-5 で不正解の人について着目する。HW2-1, 2-2 で正解しているが HW2-5 で間違えている 21 人の内 10 人はの付け忘れであった。問題文が $\cos()$ になり、マイナスを忘れていた人が半分であった。そして、HW2-1 と HW2-2 のどちらかで間違え、HW2-5 でも間違えていたケースで、同じ理由で間違えた者は 13 人の内 1 人だけだった。つまり、残りの 12 人は HW2-1 または HW2-2 での間違いを生かし正解している。HW2-6 では HW2-5 と類似の \log の問題になっているが、 $\log(x)$ の表現で HW2-5 より表記ミスが増えている。HW1 と HW2 のそれぞれで間違い回数が多いものが、HW1 だと HW1-4, HW1-6, HW2 では HW2-4, HW2-5 である。まず、HW1-4, HW2-4 の共通点が問題に分数が現れる点である。HW1-4 では分子のみ微分ができていないパターンが全体の約 3 割を占めている。誤答例として、分母の $(x-1)^2$ を 2 乗するのではなく、 $(x-1)$ だけを 2 乗するパターンが多く見られた。また、HW2-4 では $e^{(1/x)}$ の微分ができていない人が最も多く、その間違いが全体の半分を占めている。HW1-2 では $e^{(-x)}$ の微分だが、この微分を間違えているのは 11 個である。指数の部分が分数になるだけで間違い数が急増し、77 個にもなった。HW1-6, HW2-5 で共通しているのは多少複雑な合成関数の微分になることである。HW1-6 では $\sqrt{\quad}$ の引数を微分して乗算する必要があるが、引数が複雑になっているため、引数の微分が違うことや、 $\sqrt{\quad}$ が消失する誤答パターンが見られた。HW2-5 は HW2-1 と HW2-2 の性格を併せ持つような問題だが、間違いの数は単体のそれよりも多い。式が複雑になり、解答の数式も他の問題より長くなり、 $()$ の対応などの理解にも時間がかかっているのではないかと推察した。また、そちらの式の構造に意識を取られマイナスをかけるのを忘れていた可能性も否めない。今後はこういった点により注力して分析を進めてゆく所存である。

最後に、数学計算問題の誤答について分類した類似の関連研究として (1) も参照されたい。

参考文献

- (1) Y. Nakamura et al., An Attempt to Analyze Mathematical Question-Solving Processes Using STACK, Proceedings of SITE 2019, pp. 2210-2213 (2019).