

ベクトルを対象とした 2つの誤り可視化を行う学習支援システムの開発と評価

Development and Evaluation of a Learning Support System for Two Error Visualization in Learning of Vectors

十文字 智人^{*1}, 相川 野々香^{*2}, 東本崇仁^{*1}
Tomohito JUMONJI^{*1}, Nonoka AIKAWA^{*2}, Takahito TOMOTO

^{*1} 東京工芸大学工学部

^{*1} Faculty of Engineering, Tokyo Polytechnic University

^{*2} 東京工芸大学大学院工学研究科

^{*2} Graduate School of Engineering, Tokyo Polytechnic University

Email: c1818067@st.t-kougei.ac.jp

あらまし：学習者が数学問題を解くためには、試行錯誤を行うことが重要である。しかし、通常の数学の学習では、学習者が解答後に教科書や教師により正解がフィードバックされてしまうため、十分な試行錯誤を行うことができない。そこで、学習者の解答を可視化することで試行錯誤の促進が可能になると考えた。本研究では、ベクトルを対象とした誤り可視化を行う学習支援システムを開発し、評価した。

キーワード：高校数学、学習支援システム、誤りの可視化、ベクトル、数学表現

1. はじめに

学習者が問題を解くためには、試行錯誤を行うことが重要である。そして試行錯誤を促すためには、学習者の解答に対して適切なフィードバックを行う必要がある。これは、フィードバックにより学習者自身が誤りに気づき、その修正を試みることによって試行錯誤を行うことができるためである。しかし、通常の数学の学習においては、学習者が誤っていた場合は教師や教科書による正解を享受するだけになりがちであり試行錯誤を行うことは難しい。黒川ら⁽¹⁾の研究では、軌跡を対象に数学的表現⁽²⁾変換を用いた誤り可視化による学習支援を行っており、システムの有効性が確認されている。

本稿では、軌跡以外の数学範囲でも本手法が適用可能であるかを検討するために、ベクトルを対象とした学習支援システムを開発する。ベクトルには軌跡と違い「方向」という要素があり、誤りの可視化⁽³⁾方法が異なる。そこで、ベクトルにおける誤りの可視化の設計を行い、システム開発と評価を行う。

2. 提案手法

本研究では、学習者の試行錯誤を促すための手法として、ベクトルを対象とした式から図への可視化を提案する。式から図への可視化とは、学習者が入力した式の制約にしたがった図を描画することにより、学習者にフィードバックを行うものである。

ベクトルは軌跡に比べて描画の制約が厳しくない。例えば、軌跡において $y=2x+3$ という式が存在する場合、軌跡は一意に定まる。一方で、ベクトルにおいて \vec{a} の向きや大きさが規定されたとしてもそれをグラフ上のどこに配置するかは規定されない。そのため、仮に 3 点 ABC からなる正三角形を想定した

場合、 $\vec{AB} = \vec{AC} + \vec{CB}$ が成立するが、学習者が $\vec{AB} = \vec{AC} + \vec{BC}$ と誤答した場合に、その式が意味する可視化はさまざまとなる。たとえば、「三角形 ABC」という問題の制約を崩し、頂点 B と頂点 C を同一の点として可視化することで、 $\vec{AB} = \vec{AC} + \vec{BC}$ は成立することになる。あるいは $\vec{AC} + \vec{BC}$ を問題の制約に沿って可視化することで、結果として可視化されるベクトルが \vec{AB} ではないことに気づかせるという可視化も考えられる。そこで、本研究ではベクトルにおける制約の理解を促すために、前者の学習者の解答をベースに問題の制約を崩す解答ベースの誤りの可視化と、問題の制約をベースに学習者の解答の制約を崩す（例では、 $\vec{AB} = \vec{AC} + \vec{BC}$ という解答の制約を崩す）問題ベースの誤りの可視化を導入する。以上の 2 つの可視化によって、学習者の誤りの可視化を実現し、学習者による試行錯誤を促進する。

3. 提案システム

システム画面を図 1 に示す。本システムは、問題文と模範図形を提示し、学習者に解答を要求する。学習者は解答を段階的に組み立てることが要求され、模範図形は段階ごとにシステム右部に提示される。学習者の解答は 2 章の内容にしたがって画面左部に可視化される。可視化されたベクトルは、位置や向き、大きさを制約の範囲で操作できる。学習者は正解の模範図形と、自身の解答に基づいて出力された図形を比較し、試行錯誤をすることができる。

例として、図 1 の学習者は \vec{AB} と平行なベクトルとして \vec{DB} を入力している。しかし、問題ベースのベクトルでは図形として正しい形で描画されるため、 \vec{AB} と平行ではない \vec{DB} が描画される。

対して、解答ベースのベクトルでは \overline{AB} と平行なベクトルとして \overline{DB} が描画されている。しかし、 $(AB)^{\wedge}$ と平行なベクトルとして \overline{DB} を描画するために、点Bと点Cが同一の点として描画される。

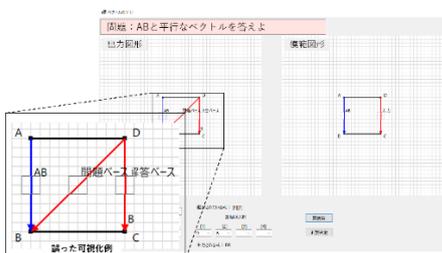


図1 システム画面（誤った入力）

4. 評価実験

工学部学生7名を対象として、A群4名、B群3名にわけて評価実験を行った。実験は二日間行い、A群は一日目にシステム、二日目に紙媒体を使用し、B群はA群と逆の順番で使用して勉強させた。紙媒体はシステムと同じ問題を記載し、高等学校で使用されている教科書の解説を引用した。またシステムの学習効果を見るため、事前・事後テストを行った。テストには、空欄埋めテストと作図テストがある。空欄埋めテストは、システムの解答形式と同じ空欄を埋める形式のテストである。作図テストは、与えられた式をもとに作図を行う問題である。

4.1 一日目の結果

テストの平均点・標準偏差を表1に、効果量をCohen's *d*を用いて表2に算出した。その結果、一日目では作図テストにおいて、システムを用いたA群に大きな効果量が見られた。これは解法のみでのフィードバックを行う紙媒体と比較して、システムでは学習者が入力した式が図形としてフィードバックされるため、学習者が式と図の対応について試行錯誤を通して学習したためだと考えられる。この結果から、作図テストの学習において、システム学習が有効であることが示唆された。

さらに空欄埋めテストについて、問題ごとに効果量を算出し、各問題の比較を群間で行った(表3)。

その結果、表2の空欄埋めテストの大問4において、システムを使用したA群が(4)、(5)の問題の効果量において上回った。大問4は与えられた点の座標を用いて、ベクトルの成分を求める問題であり、特に(4)、(5)は原点からのベクトルではない。この結果から、システム学習は成分の学習において、ベクトルの知識を学習できる可能性が示唆された。

4.2 二日目の結果

二日目は、各群が使用する媒体を一日目と逆にして評価実験を行った。表1より、B群は事前テストの時点で、各テストの平均点が高かった。

群間で各テストの効果量を比較すると、二日目に紙媒体を使用したA群が効果量において、大きく上

回る結果となった。しかし、一日目に紙媒体を使用したB群の効果量と比較しても、二日目に紙媒体を使用したA群の効果量は大きく上回っている。

この結果から、著者はシステム学習に紙媒体での学習効果を上げる効果がある可能性を考えた。そこで、実験に使用した各群の紙媒体の作図数で比較を行った。各群の紙媒体中に作図数を比較した結果、平均がA群は2個、B群は0.67個と一日目にシステム学習を行ったA群の紙作図数が多いことがわかった。この結果から、システム学習は、のちに行う紙媒体での学習効果を上げる可能性が示唆された。

表1 テスト結果：平均点（標準偏差）

			空欄埋め		作図	
			事前	事後	事前	事後
一日目	A群	平均 (標準偏差)	4.25 (2.86)	8.75 (2.17)	2.50 (0.87)	3.75 (0.83)
	B群	平均 (標準偏差)	6.00 (2.16)	12.00 (1.41)	3.67 (1.70)	3.00 (2.16)
二日目	A群	平均 (標準偏差)	8.00 (0.83)	11.25 (0.43)	3.00 (0.00)	4.00 (1.22)
	B群	平均 (標準偏差)	12.00 (1.41)	11.67 (0.47)	4.33 (2.05)	4.67 (1.70)

表2 テスト結果（効果量）

	一日目		二日目	
	空欄埋め	作図	空欄埋め	作図
A群	1.77	1.48	4.91	1.16
B群	2.15	0.34	1.32	0.18

表3 空欄埋めテスト大問4 効果量

	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
A群	1.41	1.41	1.41	1.15	2.45
B群	1.00	0.00	2.00	1.00	0.70

5. おわりに

本稿では、学習者の試行錯誤を促すため、ベクトルを対象として数学的表現の変換を行うシステムを開発し、評価実験を行った。評価実験の結果、システム学習は図と式の対応関係において、学習効果があることが示唆された。今後の課題として、入力と描画の対応の一貫性を学習者が理解できる可視化を研究していく。

参考文献

- (1) 黒川魁, 東本崇仁, 堀口知也, 平嶋宗: “軌跡を題材とした数学の表現変換と能動的誤りの発見支援機能を有する学習支援システムの開発と評価”, 電子情報通信学会論文誌 D, Vol. J101-D, No. 6, pp. 864-873, (2018)
- (2) 中原忠男: “算数・数学における構成的アプローチの研究”, 聖文社 (1995)
- (3) 平嶋宗, 堀口知也: “「誤りからの学習」を指向した誤り可視化の試み”, 教育システム情報学会誌, Vol. 21, No. 3, pp. 178-186 (2004)