

中学校数学科合同証明を対象とした「証明構造」の理解を支援する Web アプリの設計・開発に関する研究

Development of a Web based Application for Understanding Structure of Geometric Proof in Junior high School

濱田 さとみ^{*1}, 鷹岡 亮^{*1}, 横山 誠^{*2}
Satomi Hamada^{*1}, Ryo Takaoka^{*1}, Makoto Yokoyama^{*2}

^{*1} 山口大学教育学部

^{*1}Department of Education, Yamaguchi University

^{*2} 株式会社 エスブレイン

^{*2}ESBrain, Inc.

Email: u010mc@yamaguchi-u.ac.jp

あらまし: 与えられた問題から仮定と結論を認識し、仮定から結論を導くために問題から収集した情報や図形の性質等をもとに組み立てられる「証明構造」を理解することは、数学を苦手とする生徒にとって容易ではない。そこで、本研究では、中学校数学科三角形の合同証明において「証明構造」の理解を支援する証明構造理解支援 Web アプリを設計・開発し、その有効性について検証することを目的とする。本稿では、合同証明における「証明構造」について定義し、「証明構造」の可視化による理解支援について述べる。さらに、証明構造理解支援 Web アプリの機能について説明する。

キーワード: 初等幾何証明, 証明構造の可視化, 証明構造ボード, 理解支援 Web アプリ, 中学校数学

1. はじめに

中学校数学科における初等幾何証明の単元では、仮定や結論、証明の根拠となることがらを踏まえて証明の進め方を理解した後、完成済みの証明に穴を埋める問題(以後、「穴抜き問題」と呼ぶ)と、白紙の状態から1人で証明を行う問題(以後、「白紙問題」と呼ぶ)を反復することで証明を理解させようと試みる場合が多い。過去10年間の全国学力・学習状況調査の図形領域の平均正答率を見てみると、「穴抜き問題」の平均正答率が75%程度であるのに対して、「白紙問題」の平均正答率は30%程度となっている⁽¹⁾。この「穴抜き問題」から「白紙問題」の難易度を高めている要因の一つとして、学習者が仮定から結論に向けての証明過程をイメージできるかどうかの違いが挙げられる。三角形の合同証明における学習者のつまづきの分析を行った国宗ら(1977)によると、「白紙問題」を証明できなかった学習者の中で、約4割の学習者は三角形の合同を証明するためには3つの条件が必要であることを指摘できていた⁽²⁾。つまり、この約4割の学習者は、証明の構造を理解していなかったために「白紙問題」を記述することができなかったと考えられる。したがって、「穴抜き問題」と「白紙問題」を反復するだけではなく、証明の構造をイメージとして獲得しておくことが証明を記述する上で必要である。

本研究では、初等幾何証明のなかで三角形の合同証明を対象にするが、その先行研究として倉山⁽³⁾や舟生ら⁽⁴⁾があげられる。倉山は、証明を構成する文章をカードとして提供し、それらを吟味しながら組み合わせ、証明を作るシステムを開発している⁽³⁾。このシステムはカードとして与えられている文章の1文1文を学習者が検討しながら組み立てることになるため、「証明の構造」よりも「証明の構成」を意識することになると思われる。また、舟生らは、フローチャート形式で証明を組み立て、正誤判定の後に誤りを可視化できるシステムを開発している⁽⁴⁾。

このシステムは、白紙の状態から「証明の流れ」を表現するとともに、誤りの可視化によって「学習者の誤りの認識」を促すことを目的としている。幾何証明を記述できるようになるために、証明の構成や流れを可視化することを通して意識して理解することは重要である。しかし、数学を苦手とする生徒にとっては、その前段階において、証明のための構成要素(ピース)をジグソーパズルのようにあてはめる証明活動を通して、証明の構造をイメージできるようにすることが必要であると思われる。

本研究は、これらの研究と幾何証明の構造を可視化することを通して支援を行う点は一致している。しかし、証明を構成する文章の組み合わせを考える活動と、フローチャート形式による活動だけでは、証明の文章の記述や証明の流れの理解ができても、「証明構造」そのものを獲得することは一部の学習者には難しく、より「証明構造」に焦点を当てた学習を支援する必要があると考えた。したがって、これらの研究の前段階として「証明構造」のイメージを獲得する学習環境を Web アプリとして提供し、「証明構造」のイメージを獲得後、上述したシステムが用いられることが望ましいと考える。

以上を踏まえて、本研究では、中学校数学科三角形の合同証明の構造(「証明構造」)に焦点を当てた証明構造理解支援 Web アプリを設計・開発し、その有効性について検証することを目的とする。具体的に、次の2点をサブゴールとして設定する。第1に「証明構造」を可視化した状態で、証明を構成する要素を配置し、それらの要素を「証明構造」にあてはめて証明を組み立てる支援環境を構築する。第2に、学習者が作成した「証明構造」の誤り部分をフィードバックする機能を構築する。そして、中学生を対象とした学習実験とアンケート調査を通して、開発した Web アプリの有効性を検証する。

2. 「証明構造」の可視化による理解支援

合同証明は、与えられた問題から仮定と結論を抽出し、図形の性質や合同条件を活用して証明していく活動である。本研究では、与えられた問題から仮定と結論を認識し、仮定から結論を導くために問題文や問題図形から収集した情報(例： $\angle AED = \angle BEC$)，図形の性質(例：対頂角は等しい)や合同条件をもとに組み立てられる構造を「証明構造」と定義する。この「証明構造」のイメージを獲得することが、数学を苦手とする生徒にとって必要となる。そこで、三角形の合同証明の「証明構造」を構成する要素である「仮定」「結論」「根拠となる事柄(理由)」「成り立つこと」「三角形の合同条件」をピースとして埋め込める型となる「証明構造ボード(図1の左側参照)⁽⁶⁾」を用意して、この可視化した「証明構造ボード」にピースを埋めて組み立てる活動を通して「証明構造」のイメージを獲得することが可能になるのではないかと考えた。

3. 証明構造理解支援 Web アプリの概要

「証明構造」を可視化し、仮定部・結論部などの各エリアに要素(ピース)を埋め込みながら、学習者が「証明構造」のイメージを獲得することができる「証明構造理解支援 Web アプリ」を設計・開発した。

図1に Web アプリの学習者側ユーザインタフェースを示す。画面左の「証明構造」を可視化した「合同証明ボード」は上部の仮定部、中間に位置する合同証明部、下部の結論部の3つから構成されている。この「合同証明ボード」上の各エリアには、画面右に配置されている図形の関係性パネル(例： $\angle ABC = \angle DEF$)と図形の性質パネル(例：対頂角は等しい)からピースをドラッグして置くことができ、証明を組み立てていく。仮定部と合同証明部の「成り立つこと」・「証明する三角形の組み合わせ」そして結論部には、図形の関係性パネルから選択する。また、合同証明部の「理由」には、図形の性質パネル(理由一覧)から選択する。ピースを置けない場合には、最初の位置にピースが戻る仕組みになっている。

図2に証明構造理解支援 Web アプリの構成図を示す。問題提示機能は、学習者からの問題リクエストに応じて問題 DB から学習者が選択したレベルの問題を提示する。なお、問題のレベルは、合同証明のみの問題から等しい角や辺までを証明する問題まで

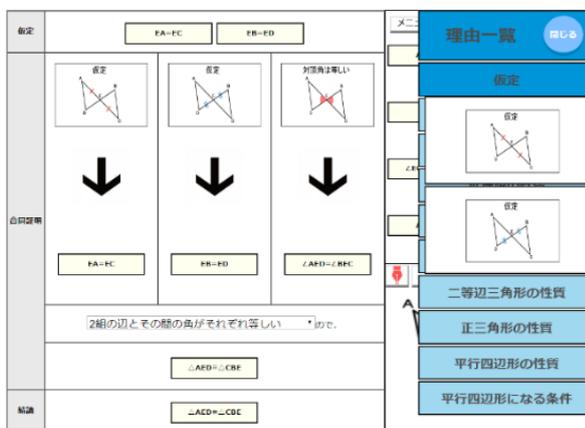


図1：「証明構造ボード」上へのピースの配置

の3段階を用意している。正誤判定機能は、学習者の正誤判定リクエストに応じて、学習者の現在の回答状況(仮定[katei], 理由[reason], 成り立つこと[result], 合同条件[godojoken], 結論[keturon])を JSON 形式でデータベースに保存されている正答データと比較して、誤ったエリアをハイライト表示するように実装されている。

また、教師が利用できる機能として、学習者の学習履歴閲覧機能がある。この機能は、学習者の名前と解答の状況を JSON 形式に変換し、解答に変化があった場合にデータベースに逐一保存することによって実装している。教師が学習履歴を確認したい学習者の名前を指定することによって、データベースに保存されている JSON 形式の学習者識別 ID・時間・「証明構造ボード」の状態を1つのドキュメントとして取り出して表示することで、証明状況を確認することができる。

4. おわりに

本稿では、中学校数学科三角形の合同証明を対象とした「証明構造」について定義し、この理解を支援する「証明構造理解支援 Web アプリ」の機能について述べた。今後の課題として、1つの「証明構造」に取り組む機能だけでなく、階層的な「証明構造」を持った証明問題に取り組む機能等を検討していくことが必要である。同時に、発展した Web アプリを協調学習において活用できる授業内容を検討していくことを考えている。

参考文献

- (1) 文部科学省国立教育政策研究所：平成 19-28 年度全国学力・学習状況調査報告書。
- (2) 小関照純 編：算数・数学教育全書 2 図形の論証指導，明治図書(1987)。
- (3) 倉山めぐみ：カード選択を利用した証明問題解決支援システム，人工知能学会全国大会資料，pp.1-2(2015)。
- (4) 舟生日出夫，亀田卓司，平嶋宗：幾何証明問題の解決における推論の誤りのインタラクティブな可視化，日本教育工学会論文誌 32(4)，pp.425-433(2009)。
- (5) 加藤明孝：合同証明の構造を理解するための合同証明ボード開発についての研究，山口大学教育学部情報科学教育課程数理情報コース平成 28 年度卒業研究論文(2016)。

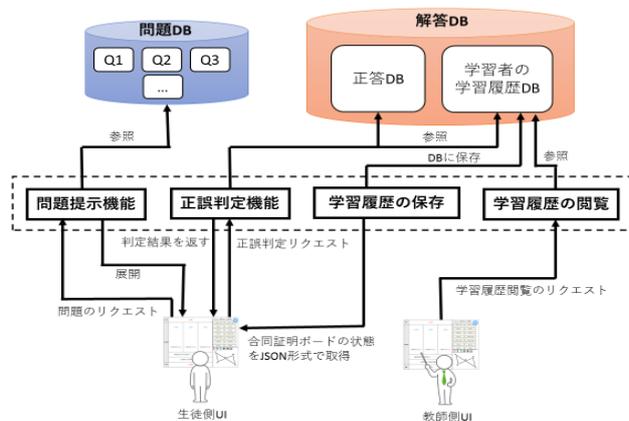


図2：証明構造理解支援 Web アプリの構成図