

ベクトルを対象とする誤り可視化の ロバストシミュレータにおけるヒューリスティクスによる分析

Analysis of Error Visualization for Vectors Using Heuristics in a Robust Simulator

十文字 智人^{*1}, 相川 野々香^{*1}, 東本 崇仁^{*2}

Tomohito JUMONJI^{*1}, Nonoka AIKAWA^{*1}, Takahito TOMOTO^{*2}

^{*1}東京工芸大学大学院工学研究科

^{*1}Graduate School of Engineering, Tokyo Polytechnic University

^{*2}東京工芸大学工学部

^{*2}Faculty of Engineering, Tokyo Polytechnic University

Email: tomohito067@gmail.com

あらまし: 本研究では学習者の試行錯誤の促進のため, ベクトルを対象とした数学的表現の変換を用いた誤り可視化の設計を行った. 本稿では, 設計した誤り可視化の妥当性について検証するため, ロバストシミュレータにおいてどのような位置づけになるか, ヒューリスティクスを用いて分析していく.

キーワード: 高校数学, 誤り可視化, 数学的表現, ベクトル

1. はじめに

学習者が問題の理解を深めるためには, 問題を解く際に自身の解答を振り返り, 試行錯誤を行うことが有効である. そのためには, 学習者に自身の誤りに気付かせるようなフィードバックを与えることが必要となる⁽¹⁾. そこで, 著者らはこれまで数学の範囲であるベクトルを対象として, 数学的表現の変換⁽²⁾を用いた 2 種類の誤り可視化⁽³⁾の設計を行ってきた. しかし, 現状の可視化では, 問題と学習者の解答の矛盾を直感的に可視化しうる方法で制約の削除を行い, 誤答を可視化している.

そこで著者らは, より妥当な可視化を検討するため, 堀口らの提唱したロバストシミュレータのヒューリスティクス⁽⁴⁾が有効だと考えた. ヒューリスティクスは, 誤り可視化において学習者が誤りに気づくための「非妥当性」を見積もる評価基準である.

本稿では, 2 種類の可視化について, ロバストシミュレータのヒューリスティクスによって, 分析する. それにより, 現状の 2 種類の誤り可視化がロバストシミュレータにおいてどのような位置づけなのかを検証する.

2. ベクトルにおける誤りの可視化

本章では, これまで設計した, ベクトルを対象とした数学的表現の変換を用いた 2 種類の誤り可視化について説明する. 著者らは問題と学習者の解答の間に制約の矛盾が発生することを前提に, 2 種類の可視化を設計した. 一つが, 学習者の解答の制約を重視し, 問題の制約を緩めることにより矛盾を解消する可視化である問題ベースの可視化である. もう一つが, 問題の制約を重視し, 学習者の解答の制約を緩め, 可視化する解答ベースの可視化である.

2.1 解答ベースの可視化

解答ベースの可視化は, 学習者の解答の制約を重視し, 問題の制約を緩めることで, 「学習者の解答を正しいものとして」可視化を行う手法である. 例として「正四角形 ABCD において, \overline{AB} と平行なベクトルを求めよ」という問題があるとす. この問題では, 「ABCD からなる正四角形」という制約があり, 正答が $\overline{AB} // \overline{DC}$ となっている. これに対して, 学習者が $\overline{AB} // \overline{BC}$ と誤答した場合, 解答ベースの可視化では \overline{AB} と \overline{BC} が平行であることを重視し, 「正四角形 ABCD」という制約を緩和する. よって, 図 1 のように正四角形 ABCD の形を崩し, 頂点 A, B, C を直線上の点として描画することで両辺の等号を成立させた可視化を行う. 解答ベースの可視化では, 学習者の解答に応じて不自然な図が描画され, 直接的な誤りへの気づきを与えられると考える.

2.2 問題ベースの可視化

問題ベースの可視化は, 問題の制約を重視した上で学習者の解答の制約を緩め, 学習者の解答の構成要素だけを可視化する手法である. 2.1 節と同様の例の場合, 問題ベースの可視化では, 「正四角形 ABCD」という問題の制約を重視して $\overline{AB} // \overline{BC}$ を可視化する. このとき, 右辺と左辺を等号で結ぶと \overline{AB} は成立できない. よって, 図 2 のように右辺と同等なベクトルを生成し, それを左辺としてラベリングすることで可視化する. しかし, ラベリングされたベクトルは, 点 A と点 B を結んだベクトルではなくなっている. 問題ベースの可視化では, 問題の制約を崩さずに可視化するため, 学習者の解答における構成要素が元の問題でどのような意味か, 可視化できる. 以上の 2 つの可視化を実装することにより, 学習者に問題における式と図の関係性を理解させられると考える.

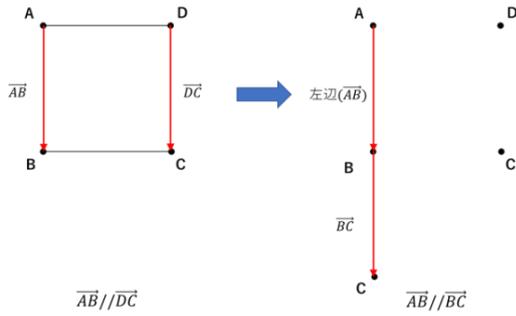


図1 解答ベースの可視化

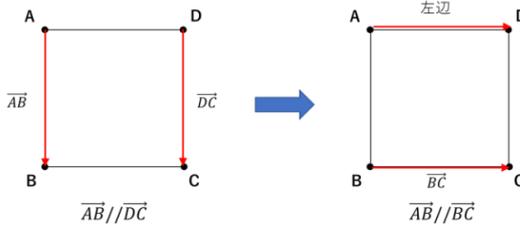


図2 問題ベースの可視化

3. ベクトルにおけるロバストシミュレーションの検討

本章では、2章で設計した2種類の誤り可視化について、学習者が誤りに気づくための「非妥当性」を検討する。具体的には、堀口ら⁽¹⁾の提唱するヒューリスティクスを2種類の誤り可視化に照らし合わせ、どれだけ非妥当性のある可視化を生成できているかを分析する。ヒューリスティクスは以下になる。

- (H1) 誤った方程式は原則、削除を行わない。
- (H2) 学習上のトピックを表す方程式を優先的に削除する。
- (H3) 定数の値や、変数の定義域を規定する方程式・不等式を優先的に削除する。
- (H4) 対象系のカットセット方程式を優先的に削除する。

原則として、問題と学習者の解答の制約の間に発生する矛盾を解消する上で、削除される制約の数が少ないほど学習者が「妥当ではない」と誤りに気づきやすい可視化を生成できると考える。

例として2章であつかった問題について、解答ベースの可視化には、図1と図3の2種類の可視化があり得るが、現在の可視化では図1の可視化を採用している。なぜなら、図1の可視化では、問題のトピックである制約の「正四角形 ABCD」のみを削除することにより矛盾を解消し、可視化している。それに対して図3は、問題と学習者の解答の間に発生する矛盾を解消するため、トピックである「正四角形 ABCD」という制約に加え、定数の値や、変数の定義域を規定する不等式である「 $\overrightarrow{AC} > 0$ 」を削除している。このように、図3の可視化は図1の可視化より多くの制約を削除しているため、学習者にとって図3の方が非妥当性は低いと考える。そのため、図1の可視化がロバストシミュレータとして妥当だとヒューリスティクスから言える。以上のようにし

てヒューリスティクスに照らし合わせ2種類の誤り可視化の「非妥当性」を分析していく。分析した結果の一部を表1に示した。表1の平行の誤り可視化の解答ベースの要件では、学習者の誤答を削除せず、トピックの方程式とカットセット方程式を削除している。問題ベースでは、誤答自体は削除していないが構成要素のみを可視化している。

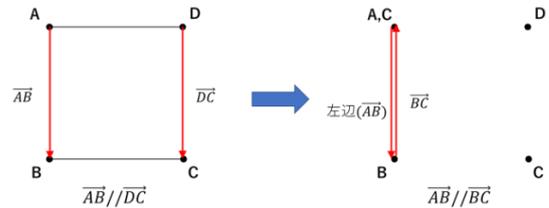


図3 別の解答ベースの可視化

表1 ヒューリスティクスの適応リストの一部

問題	可視化	誤答 非削除	トピック	規約 方程式	カット セット
平行	解答	○	○	×	○
	問題	△	○	×	○
逆	解答	○	○	×	×
	問題	×	○	×	×
加算	解答	○	○	×	○
	問題	×	×	×	×
減算	解答	○	△	×	○
	問題	×	×	×	×

4. おわりに

本稿では、これまで設計してきたベクトルを対象とした2種類の誤り可視化について、妥当な可視化を生成できているか、分析した。そのために堀口ら⁽¹⁾の提唱したヒューリスティクスを照らし合わせ、2種類の誤り可視化のロバストシミュレータにおける位置づけを検証した。

今後の課題として、今回検討を行った問題以外にもロバストシミュレータとして適切な可視化を生成できているか検証を進める。また、ロバストシミュレータとして妥当ではなかった場合、ロバストシミュレータとして妥当な可視化を生成できるように改善を行っていく。

謝辞

本研究の一部は JSPS 科研費 JP22K12322, JP21H03565, JP20H01730, JP19H04227 の助成による。

参考文献

- (1) 堀口知也, 平嶋宗: “学習支援を指向した誤り可視化のためのロバストシミュレータ”, 人工知能学会論文誌, Vol. 21, No. 6, pp. 514-525 (2006)
- (2) 中原忠男: “算数・数学における構成的アプローチの研究”, 聖文社 (1995)
- (3) 平嶋宗, 堀口知也: “「誤りからの学習」を指向した誤り可視化の試み”, 教育システム情報学会誌, Vol. 21, No. 3, pp. 178-186 (2004)