

## 数理パズルを題材とした情報教育の実践

### A Practice of Information Education Using Mathematical Puzzles as Teaching Materials

山田 耕太郎, 有吉 優菜

Kotaro YAMADA, Yuna ARIYOSHI

比治山大学現代文化学部

Faculty of Contemporary Culture, Hijiya University

Email: kyamada@hijiya-u.ac.jp

**あらまし**：2進数は単にコンピュータの中だけのものではなく、思考の整理や作業の効率化に役立つものであることを学生が体験的に学べるよう、数理パズルの「ハノイの塔」「ジェルゴンのトランプマジック」「石取りゲーム」を情報教育の授業に取り入れることとした。これらのパズルは2進数だけでなく、3進数や4進数で手順や戦略を整理することができる。我々は授業実践によって、その教育効果を明らかにすることを目的としている。

**キーワード**：数理パズル、アルゴリズム、情報教育、ハノイの塔、石取りゲーム

#### 1. はじめに

筆者は文系学生を対象とした情報教育を行っているが、2進数によって文字も音声も画像も全て符号化されている、という内容は学生にとって理解が難しいトピックのひとつである。

また、近年は問題解決能力や論理的思考力の育成が課題となっていることから、プログラミングやアルゴリズム教育に重点を置いている。特にアルゴリズム教育ではソートや探索（二分探索・線形探索）をアンブラグドメソッド<sup>(1)</sup>で実施し、学生の興味と理解を促す授業展開を行ってきた。

しかし、2進数による符号化もソートも探索もコンピュータの中で行われている処理であり、ヒトが日常生活の中で行う作業や手順との差異の方が印象として残るため、教育効果は限定的であった。

そこで、2進数がコンピュータに特有のものではなく、思考の整理や日常で行う作業の効率化（アルゴリズム化）に役立つ道具となり得ることを体験的に学べるよう、数理パズルを教材として取り入れた。

#### 2. 教材としての数理パズル

アンブラグドメソッドのように、ゲーム性やパズル性を取り入れた授業は学生の興味喚起とモチベーション維持に有効である。この有効性に着目し、昨年度の授業で数理パズルのひとつであるハノイの塔を採り上げ、その移動規則を2進数で整理できることを示した。今年度はハノイの塔に加え、ジェルゴンのトランプマジック<sup>(2)</sup>と石取りゲーム<sup>(3)</sup>を加えた。これらの数理パズルと情報教育との関連は以下の通りである。

##### 2.1 ハノイの塔

ハノイの塔は単純なルールに従って円盤を移動させていくパズルの一種であり、プログラミングにおいては再帰的アルゴリズムの例として採り上げられることが多い。最小の手数で円盤の移動が完成する

パターンは、円盤の移動回数を2進数表記したものと1対1で対応していることが知られているため、移動規則を2進数で整理して理解することができる。

授業では最初、2進数との関連には触れずに移動する円盤を順番に列記させる。このとき、小さい円盤から順にA, B, C, …と名付けると2枚のハノイの塔の場合ABAで移動が完成する。同様に3枚の場合にはABACABAとなり、4枚の場合にはABACABADABACABAとなることを、小銭やカードなどの実物をハノイの塔に見立てて試行錯誤的に見出す学生が出てくる。ここまで来ると再帰的な構造が見えるため、それをヒントとして与えると5枚の場合は機械的に答えを導き出すことができる。

ここまで理解できたら2進数との対応を考える。その手始めとして、どの円盤が移動するのかを2進数から読み解き、それができれば、移動先を読み解く作業に移る。例えば5枚のハノイの塔で20回目の移動後が図1の状態になっていたとする。21回目に円盤Aが移動するのであるが、移動先としてはCの上とDの上があり、ハノイの塔のルールとしてはどちらに移動しても構わないため迷いが生じる。しかし、最小の手数で全ての移動を終えるにはDの上に移動するのが正解である。これは移動回数の21を2進数表記した10101と円盤の名前を対応付けて

E D C B A  
10101

とし、下位ビットから上位ビットへ走査したときに、最初に1のビットが立っている円盤が移動する円盤で、2番目に1のビットが立っている円盤が移動先候補となることと、それらのビット間に0が偶数個あるか奇数個あるかで、移動の可否が決まることを理解できれば、移動で迷うことはなくなる。上記の場合、0が奇数個あるため、「AはCの上に移動できない」と読み解くことで「AはDの上に移動する」と判断できる。

このようなビット走査での情報の読み取りは、CDやDVDからデータを読み取る仕組みと類似してい

るため、コンピュータがデータを読み取り・解釈していることを体験的に学ぶ効果が期待できる。

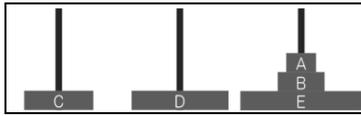


図1 ハノイの塔の状態

また、2進数表記を上位ビットから下位ビットへ走査し、円盤の移動パターンと組み合わせることで、ハノイの塔の状態を再現することもでき、授業ではここまですをハノイの塔の到達目標としている。

## 2.2 ジェルゴンのトランプマジック

ジェルゴンのトランプマジックは 27 枚のトランプカードから特定の 1 枚を当てるマジックであり、その手順は次の通りである。

- 27枚のカードから特定の1枚を受講生に選んで覚えてもらう。
- 受講生に「1 から 27 までの数字をひとつ決めて教えてください」と言う(ここで 16 と言ったとする)。
- 27枚のカードを3つの山に分ける、どの山に選んだカードがあるのかを教えてください。
- 選んだカードがある山が一番上になるように3つの山を束ね、もう一度3つの山に分ける。
- 再び、どの山に選んだカードがあるかを教えてください、その山が一番上になるように3つの山を束ね、再度3つの山に分ける。
- もう一度だけどの山に選んだカードがあるのかを教えてください、今度はその山が真ん中になるように3つの山を束ねる。
- この束の上から16枚目に選んだカードがあるため、結果的にカードを言い当てることになる。

このマジックは3進数で整理することができ、上記の例の場合16から1を引いた15を3進数に直した120を逆順に並べて021とし、各桁に1を加えた132を「カードを束ねるときに、最初は1番上に、次は下から3番目(つまり一番上)に、最後に2番目(真ん中)に」と読み解くことで特定のカードを16枚目に移動することが可能となる。

ただし、この手順を頭の中で行うには複雑すぎるため、教材としては不向きである。そこで我々は3の倍数の性質を使って簡略化した手順を使う。上記の例の場合16の各桁の和(7)を3で割った余りから1回目束ねる場所を、次に7が6より大きいか3以下なのかで2回目の場所を、3回目は16が18より大きいか9以下なのかで束ねる場所を決める。一般的な手順については発表時に紹介する。

## 2.3 石取りゲーム

石取りゲームは別名「三山くずし」と呼ばれているもので、2人で交互に3つの山に分けた石の取り合いをし、最後に石を取り切った人が勝ちとなるゲームである。ただし、石は1度に幾つ取っても構わないが、3つの山のうち1つの山から取らなければならない。

このゲームには必勝法があることが知られており、3つの山の石の個数をそれぞれ  $x, y, z$  とするとき、

$$x \oplus y \oplus z = 0 \dots \textcircled{1}$$

を満たすよう相手に引き渡していけば必ず勝てる。ただし、ここで $\oplus$ 記号は排他的論理和を表しており、石の数が最も少ない状態は  $(x, y, z) = (1, 2, 3)$  である。

この必勝法は2進数による説明が主になされているが、我々は4進数の導入が教育的であると考えている。その理由の一つは、 $\textcircled{1}$ 式を満たす  $x, y, z$  の組み合わせを表にしたとき(表1)、 $4 \times 4$  のマトリックスが周期的に現れることである。この表は1行目が  $x$ 、1列目が  $y$  を表しており、 $x$  の値を下に、 $y$  の値を右に見たときにクロスする値が  $z$  となっている。周期性は各セルを4で割ったときの余りを調べるとより明確になる。

表1  $\textcircled{1}$ 式を満たす組み合わせ表

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	0	3	2	5	4	7	6	9	8	11	10	13	12	15	14
2	3	0	1	6	7	4	5	10	11	8	9	14	15	12	13
3	2	1	0	7	6	5	4	11	10	9	8	15	14	13	12
4	5	6	7	0	1	2	3	12	13	14	15	8	9	10	11
5	4	7	6	1	0	3	2	13	12	15	14	9	8	11	10
6	7	4	5	2	3	0	1	14	15	12	13	10	11	8	9
7	6	5	4	3	2	1	0	15	14	13	12	11	10	9	8
8	9	10	11	12	13	14	15	0	1	2	3	4	5	6	7
9	8	11	10	13	12	15	14	1	0	3	2	5	4	7	6
10	11	8	9	14	15	12	13	2	3	0	1	6	7	4	5
11	10	9	8	15	14	13	12	3	2	1	0	7	6	5	4
12	13	14	15	8	9	10	11	4	5	6	7	0	1	2	3
13	12	15	14	9	8	11	10	5	4	7	6	1	0	3	2
14	15	12	13	10	11	8	9	6	7	4	5	2	3	0	1
15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

また  $(x, y, z)$  を座標に見立て、 $x > y$  の条件で3次元プロットしたとき、図2のようにシェルピンスキーのギャスケットと呼ばれるフラクタル構造が現れることも教育的である。

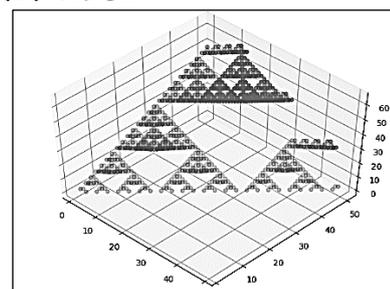


図2  $\textcircled{1}$ 式を満たす座標点の3次元プロット

## 3. まとめ

数理パズルとして「ハノイの塔」「ジェルゴンのトランプマジック」「石取りゲーム」を採り上げ、教材としての位置付けを示した。なお、本稿執筆時点ではこの教材による授業実践を行っているところであるため、教育効果については発表時に紹介する。

### 参考文献

- (1) Tim Bell, Ian H.Witten, Mike Fellows, 兼宗進：“コンピュータを使わない情報教育 アンプラグドコンピュータサイエンス”，イーテキスト研究所(2007)
- (2) 上野富美夫：“数学マジック辞典”，東京堂出版(2015)
- (3) 一松信：“石とりゲームの数理”，森北出版(2003)