

分数演算の关系的理解を可能とする分数ブロックモデルとその操作型学習環境の設計・開発

Fraction Block Model and Interactive Environment for Learning by Manipulating the Blocks

城谷 昭充, 平嶋 宗

Akimitsu JOYA, Tsukasa HIRASHIMA

広島大学大学院工学研究科

Graduate School of Engineering, Hiroshima University

Email: joya@lel.hiroshima-u.ac.jp

あらまし: 筆者らはこれまでに, 分数の比としての意味を具象化した分数ブロックモデルを提案し, 量を表す数と比を表す分数の乗除としての操作が可能な環境を実装し, 小学校における実験的な利用までを行っている. 本稿では, 分数ブロックを用いた分数同士の乗除算を定義するとともに, 連比を用いてその操作の妥当性を説明する. 分数ブロックモデルを用いることで, 分数の演算を一貫した具象モデルで説明することができることになり, 分数の理解の向上に貢献することが期待できる.

キーワード: 分数ブロックモデル, 比としての分数, 連比

1. はじめに

分数とは, 二つの数の比を用いた数の表現法の一つであり, 分母の数に対する分子の数の割合を表していると捉えてよい. したがって, 分数を理解する上で, 割合としての意味を理解することは不可欠であるといえる. しかしながら, 小学校において分数を教える際には, 分母を等分操作, 分子を累加操作として, 図などによって具象化された量に対する処理として説明するのが一般的である. つまり, 分数とは, 分母で割って, 分子を掛けるという処理としての説明である. この説明は, 分数を量に対する操作として具象化しているという点で, 受け入れやすいものになっているが, この説明から比・割合としての意味を読み取ることは簡単とは言えない. このような説明で分数を意味づけていることが, 分数理解の困難さの一因であると筆者らは考えている.

分数ブロックモデル⁽¹⁾は, 分数の比としての意味を具象化したものであり, このモデルを操作することで, 比としての分数を具体的な操作を通して学ぶことができる. 筆者らはすでに, 量を表す数と比を表す分数の乗除を対象として, 分数ブロックを用いた計算操作を行える学習環境を実装し, 小学校での実験的利用まで行い, その結果を報告している⁽¹⁾.

本稿では, 分数ブロックモデルを用いた分数同士の乗除算を定義するとともに, 連比を用いてその操作の妥当性を説明する. この説明は, 連比の性質を用いた説明となっており, 従来の操作としての説明よりも, 关系的理解を促すものになりえると期待できる. なお, 連比は小学校では取り扱われないため, 小学校においては分数ブロックを道具的に理解するしかないが, 分数ブロックの操作が連比として説明できることは, その道具的理解が关系的理解に直結することを意味しており, 分数ブロックを用いた分数理解の妥当性を示すもの上で重要と考えている.

2. 分数ブロックモデルと演算

2.1 分数ブロックモデル

分数を分母の数と分子の数の比の表現として捉えると, その具象化は, 分母の数と分子の数の比の具象化となる. 量と比の違いは, 量では「1」が固定されているのに対して, 比においては「1」を固定する必要はなく, 分母の数と分子の数の「1」が同じであれば良いことである. この条件を満たすものとして考案しているのが, 分数ブロックである.

図1に分数ブロックの例を示した. これは, $2/3$ を表現している. 分数ブロックは, 分母ブロック (下側) と分子ブロック (上側) の二つのブロックにより構成されており, それぞれのブロックは同じ大きさの「単位ブロック」により構成されている. ここで, 「比においては「1」を固定する必要はなく, 分母の数と分子の数の「1」が同じであれば良い」ことから, 単位ブロックは一つの分数ブロック内で大きさが一致していればよい. 同一分数ブロック内で同じであれば, 単位ブロックの横の長さを変えることができるようにしており, これにより, 分数の比としての値を保ったまま, 見かけの大きさを変えることができる.

2.2 量を表す数と分数ブロックの演算⁽¹⁾

図2は, 量「1」に対する $2/3$ と量「2」に対する $2/3$ を取り出す操作を表している. まず, 「量」を分数ブロックの分母に合わせる. これで, 分母ブロックは, 等分の単位ブロックで構成されているので, これで分母分の1が決定されることになる. その上で, 分子ブロックの長さに相当する量を取り出す. これが, 分子分の量, に相当する. 以上が分数ブロックを用いた掛け算の説明となる. 割り算の場合は, 「量」を分子ブロックに合わせて, 分母ブロッ

クに相当する大きさの「量」を結果とする。

一般的な教え方では、分母を等分操作、分子を累加操作として、処理として表してはいるものの、分数自体の実体は表せていないといえる。これに対して、分数を実体あるものとして表現できたことが分数ブロックの成果であるといえる。

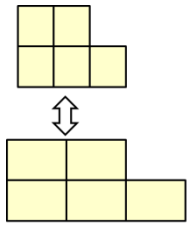


図 1 2/3 の分数ブロック表現(上と下とも)

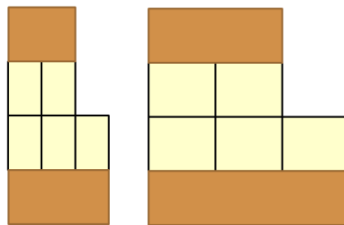


図 2 1 の 2/3 と 2 の 2/3 の計算操作

2.3 分数同士の乗除

本節では分数ブロック同士の乗法の操作を説明した上で、連比を用いてその操作の妥当性を説明する。 $4/5 \times 2/3$ を例とする。(Step1) まず、演算数 ($2/3$) の分母に対して、被演算数 ($4/5$) の分子を合わせる (つまり横の長さを一致させる)。(Step2) このままでは単位ブロックの大きさが一致しないので、それぞれ合わせた相手の等分数 (単位ブロック数) だけの等分を自身の単位ブロックに対して行う (それぞれの分母、分子ブロックに対しても同様に等分する)。これで単位ブロックの大きさが一致したことになる。その上で、(Step3) 中間の分母・分子を削除して、演算数の分子ブロックと非演算数の分母ブロックを残すと、掛け算の計算結果としての分数ブロックが得られる。図 3 にこの過程を示した。

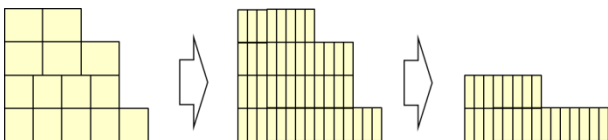


図 3 分数同士の乗法

これを計算式として書くと、

$$4/5 \times 2/3 = 12/15 \times 8/12 = 8/15$$

となる。これは、被演算数の分子と演算数の分母の数を一致させ (単純公倍数にする)、それら同士を相殺して、残った被演算数の分母と演算数の分子で分数を構成していることになる。計算結果自体は正しいものとなるが、一般的な分数の掛け算の定義である、分子同士、分母同士の掛け算を行っているわけではない。したがって、なぜこのような手順で計算を行うのかについての妥当性の説明が必要といえる。

分数ブロック同士の乗法の操作の妥当性は、分数同士の計算を連比の計算として捉えることで図 4 に示した流れで説明できる。一方、除法は、図 4 において、 $Y:Z = c/d:1$ となる c/d が分数として与えら

れた場合に発生するものと説明できる。等分操作と累加操作として分数と捉えていると、分母と分子を入れ替えて掛け算にする、という操作は奇妙に思えるが、比として考えると、 $X:Y$ と $Y:X$ の違いであり、より自然な操作として説明できる。

$X:Y = a:b, Y:Z = c:d, X:Z = 1:?$

のときの?を求める

$X:Y = ac:bc, Y:Z = bc:bd$

Yの値を揃えることで連比が作れる

$X:Y:Z = ac:bc:db$

連比が成立したので、Yを取り除くと

$X:Z = 1:db/ac$

ここで、

$X:Y = 1:b/a, Y:Z = 1:d/c$

つまり、Xを1としたときのYである b/a と、Yを1としたときのZである d/c をかけることで、Xを1としたときのZを求めるのが、分数の掛け算である。

図 4 連比を使った分数乗法の解釈

2.4 整数への拡張

前節では、分数同士の計算として説明したが、整数に対しての乗法も同様に説明可能である。整数は、分母が1であると考えればよく、単位ブロック1個を分母ブロックとする分数ブロックとして表現できる。たとえば、 $5 \times 2/3$ とは、1に対する5があった時、その5を3と思った時の2が、最初の1に対してどのような大きさになるかを計算するものとなる。

3. 操作型学習環境の設計・開発

分数ブロックモデルに基づいて分数計算を行うことができる学習環境を開発している。この環境においては、分数ブロック表現、式表現、言語表現、の三つが連動するようになっており、それぞれの表現を操作することによる他の表現への影響を見ることができるようになっている。また、従来の教科書等で使われている、具体物に対する等分・累加操作も、事例的に連動させることができるようになる。これらの連動によって、従来の分数の意味づけを統合的に説明するものとして、分数ブロックを位置付けることを目指している。

4. まとめ

本稿では、分数の比としての意味を具象化した分数ブロックを紹介し、その乗除の操作が連比の操作として説明できることを述べた。この分数ブロックモデルに基づいた学習環境を開発しており、その評価を今後行う予定である。

参考文献

- (1) 城谷昭充, 前田一誠, 平嶋宗, “割合分数を具象化する分数ブロックの提案と学習支援システムの設計・開発および試験的利用”, 電子情報通信学会論文誌, Vol.97-D, No.10, pp.1553-1562(2014.10).