

電気回路シュミレータを用いた数学の実験

Mathematical experiments with an electronic circuit simulator

高木和久

Kazuhisa TAKAGI

高知工業高等専門学校

Kochi college of technology

Email: ktakagi@ge.kochi-ct.ac.jp

abstract : Everyone knows that currents of AC circuits are sine curves. But no one use electronic circuits to make mathematics lessons more impressive. Real electronic circuits are expensive and dangerous for careless students, and they need a laboratory which math teachers do not have. I used a simulator in a usual classroom. It is safe, more convenient, and helpful for students to understand mathematics.

キーワード : 電気回路, 三角関数, 三角方程式, 中国人剰余定理, 連立合同方程式

1. はじめに

近年,基礎学力が不足していたり学習意欲の低い学生が多数高等教育機関に入学して来るようになった。彼らについては真面目に授業を受けて一度きちんと理解した内容であっても3~4ヵ月経つとその内容をきれいに忘れてしまう,という傾向が見られる。数学は積み重ねの学問であるのでここまで短期間で記憶をなくされると対応に苦慮することになる。

そこで,数学を教授する際に強く学生の印象に残る教え方を取り入れる試みを始めた。本論文では,三角関数(数学Ⅱの範囲)と初等整数論(数学Aの範囲)に関する教材を紹介する。

2. 三角関数に関する実験

日常生活の中では $y = \sin \theta$ のグラフは交流の波形として現れる。シュミレータを用いて簡単な電気回路を作り,回路に流れる電流の波形をオシロスコープで見せた。(図1)

周波数を $\frac{1}{360} = 0.002777\text{Hz}$ に設定すると正弦波の周期が360秒になる。例えば,三角方程式 $\sin \theta = \frac{1}{2}$ の解を求めるには,0.5アンペアの電流が流れる直流の回路をもう1つ作り,両方の回路を流れる電流の値が一致する箇所を探せばよい。30秒および150秒経過した時に2つの回路を流れる電流の瞬時値が一致するので, $\sin \theta = \frac{1}{2}$ の解が $\theta=30^\circ, 150^\circ$ であることがわかる。(図2)

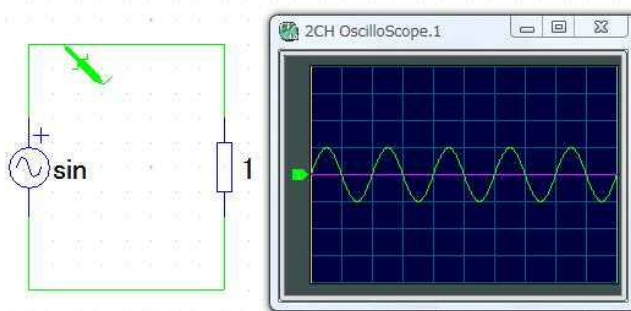


図1. オシロスコープで電流の波形を観察する

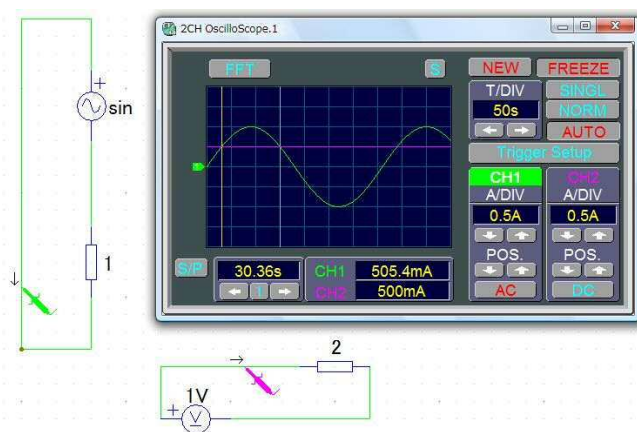


図2. 30s および 150s で電流の値が一致する

また,シグナルジェネレータを2台用意し,正弦波と余弦波を合成するという実験も行った。(図3)

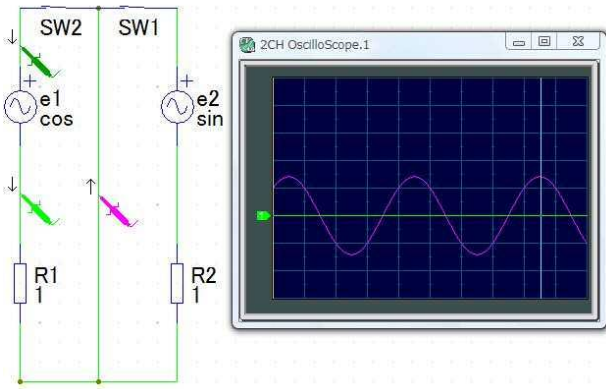


図3. 正弦波と余弦波の合成

3. 中国人剰余定理に関する実験

連立合同方程式の解を求める次の問題は中国の書物, 孫子算経に由来する有名な問題である。

$$\begin{cases} x \equiv 2 \pmod{3} \\ x \equiv 3 \pmod{5} \\ x \equiv 2 \pmod{7} \end{cases}$$

直流の電気回路を用いてこの合同方程式の解を求めよう。

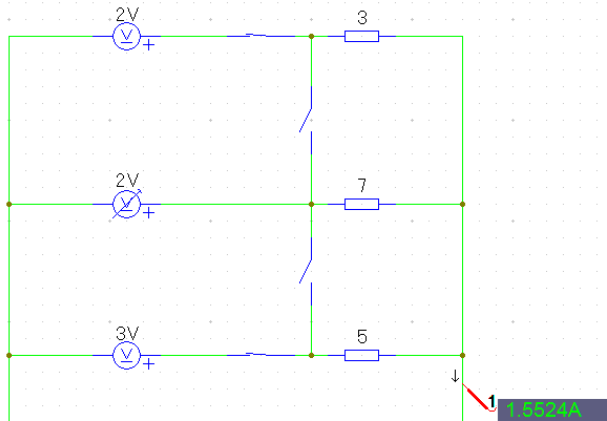


図4. 連立合同方程式を解く

まず,2 ボルト,2 ボルト,3 ボルトの電圧を加えて回路に流れる電流の値を測定する。(図4) 電流の値の端数は 0.5524 である。中央の電源の値は可変であり,ステップ値は 7 に設定してある。

スイッチを図5のように切り替えた後,中央の電源の値を 7 ずつ増加させ,流れる電流の端数が 0.5524 となる電圧を探す。マウスを 3 回クリックして電圧が 23 ボルトになった時に電流値の端数が 0.5524 となるので,最小の自然数解は 23 である。

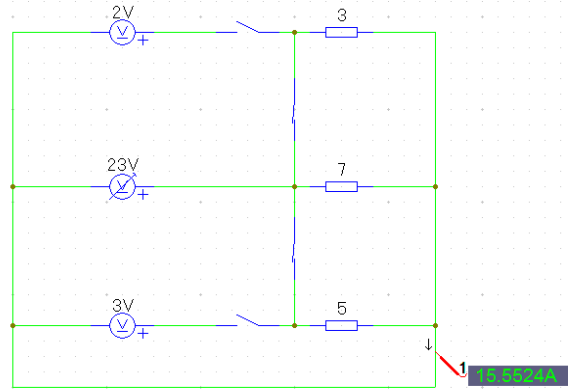


図5. 整数解が求められた

4. 考察

三角関数の合成は, 一般に

$$a \cos \theta + b \sin \theta = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\theta - \alpha)$$

という公式で表わされる。極座標を用いて

$$\theta = \alpha, \theta = \alpha + \pi \left(-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2} \right)$$

と表わされる 2 つの半直線と, 直交座標を用いて

$$ax + by = 0 \quad (b > 0)$$

と表わされる直線が同じものであったとすると

$$\cos \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \sin \alpha = \frac{-a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

が成り立つ。そして, 直交座標で (x_0, y_0) , 極座標で (r, θ) と表わされる点 P とこの直線の距離は

$$r \sin |\theta - \alpha|$$

である。

点 P が直線より上側にあるときは $\theta > \alpha$ であるから

$$r \sin |\theta - \alpha| = r \sin(\theta - \alpha)$$

$$= r \sin \theta \cos \alpha - r \cos \theta \sin \alpha$$

$$= y_0 \cdot \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} - x_0 \cdot \frac{-a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$= \frac{ax_0 + by_0}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|ax_0 + by_0|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

それ以外の場合でも点 P (x_0, y_0) と直線 $ax + by =$

0 の距離は $\frac{|ax_0 + by_0|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ で与えられる。

以上の考察により三角関数の合成の公式における α は, $\sin \theta$ を y で, $\cos \theta$ を x で置き換えて得られる直線 $ax + by = 0$ が x 軸と成す角であることがわかる。