

## 幾何証明課題の問題解決過程における推論の誤りの可視化

## Visualization of Errors in Geometry Proof Problems

大段由貴子<sup>\*1</sup>, 林雄介<sup>\*2</sup>, 平嶋宗<sup>\*2</sup>Yukiko OHDAN<sup>\*1</sup>, Yusuke HAYASHI<sup>\*2</sup>, Tsukasa HIRASHIMA<sup>\*2</sup><sup>\*1</sup> 広島大学工学部<sup>\*1</sup> Faculty of Engineering, Hiroshima University<sup>\*2</sup> 広島大学工学研究科<sup>\*2</sup> Graduate School of Engineering, Hiroshima University

Email: ohdan@lel.hiroshima-u.ac.jp

あらまし：本研究では三角形の合同証明課題の過程で発生する誤りを、その誤りを正しいとした場合に成立する図形として可視化することで、学習者の誤りに対する気づきを促し問題解決を支援するシステムを開発している。先行研究でいくつかのタイプの誤りの可視化を実現しているが、「前件肯定規則において前件が対象図形において成立しているが、後件が成立していない」場合についての可視化は行えていなかった。本研究では、対象図形を前件と後件の両方が満たされるように変形し、対象図形との差分として誤りを可視化する方法を提案する。

キーワード：幾何証明，推論規則，誤り，可視化，フィードバック

## 1. はじめに

学習者の「誤り」が学習において重要な役割を果たすことは指摘されているが、同時に誤りを学習契機とするためには、学習者自身が誤りに内発的に気づくことが重要であることも指摘されている<sup>(1)</sup>。内発的な気づきを誘発するための方法として、「誤り」に基づくどのような結論が導かれてしまうのかを学習者に視覚的に示す「誤りの可視化」がある。可視化された誤りを学習者にフィードバックすることで、学習者の誤りに対する気づきを促すことができる。幾何証明という問題領域において誤りの可視化を行うシステム<sup>(2)</sup>によって考案されている。本研究では、このシステムでは可視化できていなかった種類の誤りに対する可視化する手法を提案する。

## 2. 幾何証明における誤りの可視化

## 2.1 誤りの分類

幾何証明における推論の多くは論理包含 ( $P \rightarrow Q$ ) を前件肯定規則（前件  $P$  が真であることから、後件  $Q$  が真であることを導く）として用いることで行われる。前件肯定規則に基づいた推論における誤りは、「前件が不適切な場合」と「前件肯定規則が不適切な場合」の2通りがある。また、前件が不適切な場合は「(1-1)前件が対象図形において偽である場合」と「(1-2)前件自体は真だが、証明過程においてまだ未知である場合」の2つに分けられる。前件肯定規則が不適切な場合は、学習者が用いた前件自体は対象図形において成立しているものの、後件が不適切な場合であり、「(2-1)前件、後件ともに対象図形において成立しているものの、前件から後件を直接導く事はできない場合」、「(2-2)後件が対象図形において成立していない場合」がある。これらの誤りについて先行研究で実装されていた誤りの可視化について

次節で述べる。

## 2.2 先行研究での誤りの可視化

(1-1)の誤りにおいては、学習者は対象図形に存在しない命題を真としており、その命題を真とするように対象図形を変形した図形を生成する。生成された図形と対象図形の差分として誤りが可視化されることになる。この誤り可視化は先行研究で実現されている。

(1-2)に関しては、前件を導く推論がまだ行われていない場合であり、記述された部分だけについては間違っているとはいえないことにある。このため、先行研究においてもこの誤りの可視化はできていない。本研究においても、取り扱わない種類の誤りとなる。なお、この場合については、「前件がまだ導かれていない」というフィードバックを返すのが妥当と考えられる。

(2-1)の誤りにおいては、後件を導くためには、後件以外の条件が必要になることを示しており、したがって、前件のみを満たし後件を満たさない図形が導かれうることを意味している。このため、前件を満たしつつ、後件を満たさない図形を生成することができれば、学習者の用いた前件肯定規則に対する誤りの可視化になるといえる。この誤り可視化については先行研究ですでに実現されている。

(2-2)については、対象図形において成立している前件に対して、後件が対象図形において成立していない場合である。先行研究ではこのような場合に対して、図が後件の命題を満たしていないこととして可視化されるとの観点から特に可視化操作を行っていなかったが、その推論が妥当と考えている学習者に対してこのようなフィードバックは妥当ではないと考え、誤りの可視化を行うことを目指したのが本

研究となる。

この場合、前件を保ちつつ後件を満たすように対象図形を変形することができれば、学習者の示した前件肯定規則を満たしつつ、対象図形と異なる図形の存在として誤りを可視化することができる。この可視化については、3章で具体的に説明する。

### 3. 提案手法

本章では、前件は対象図形において成立しているが、後件が対象図形において成立していない、といった論証の誤りについて、その事例、誤りの可視化の方法および可視化の事例について説明する。

対象図形において推論の前件が成立し、後件が成立しない場合、学習者は図形中で後件が成り立っているという間違っただけの考えを持っていることになる。例えば、図1の問題について、 $AP//BQ$ の条件下で「 $AP//BQ$ なので、 $\angle OAP = \angle OBQ$ 」という推論は誤りであり、2角が錯角・同位角であることを指摘する必要がある。この推論を正しいとして受け入れるとすると、 $\angle OAP$ と $\angle OBQ$ が対象図形において錯角や同位角の関係にない場合でも、学習者は $AP//BQ$ ならば $\angle OAP = \angle OBQ$ が成り立つという誤った考えを持っていることになる。

先行研究では、このような場合、元の図形が $\angle OAP = \angle OQB$ を満たしていないことから、元の図形そのものを示すだけでよいとしていた。しかし、この手法では正しい図形と誤りを可視化した図形の間に差異がないため、学習者が誤りに気づくことができただけでなく、混乱に陥りかねない。これに対して、本研究では、この誤りを指摘するため、後件が成立していなければ前件と後件が共に成立する図形を返し、学習者の示した前件肯定規則を満たしつつ問題図形と異なる図形をフィードバックすることで、学習者の誤りを可視化する。

前件と後件が共に成立する図形を生成するには、学習者の誤りに含まれる前件と後件に応じた図形変形規則を用いる。各図形変形規則は、前件を満たす図形に対して、後件を満たすための条件を求め、その条件を付与できるか判定する。付与できる場合は前件と後件を共に成立させる図形を生成する。この時、誤った推論に関わらない要素を可能な限り変更しないようにする。もし条件を付与できない場合は、「推論規則が間違っています」という否定的フィードバックを行う。この具体的な事例を以下に示す。

例えば図1の問題について $AP//BQ$ 、 $\angle OAP \neq \angle OQB$ の条件下で「 $AP//BQ$ なので、 $\angle OAP = \angle OQB$ 」という推論を行った場合、システムはまず前件となる平行線 $AP$ 、 $BQ$ と後件である $\angle OAP$ 、 $\angle OQB$ の位置関係を把握する。双方の角が前件である平行線を含む場合（こちらに該当）、 $\angle OQB$ のもつ平行線( $BQ$ )に向かい合う角である $\angle BOQ$ の大きさを、 $\angle OQB = \angle OAP$ となるように変更する。そして $OQ$ の

延長線と平行線 $BQ$ との交点に新しい点 $Q'$ をとり、学習者に新しい $\angle OQ'B$ をフィードバックする。この動作により、できる限り他の点の位置関係を変更せずに新しい $\angle OQ'B$ を生成することができる。この $\angle OQ'B$ は、前件である $AP//BQ$ を満たし、誤った後件である $\angle OAP = \angle OQB$ も満たすため、学習者の誤りを可視化できていることになる。後件である角のどちらかが前件となる平行線を含まない場合は、その角の大きさを直接変更する。その他の手続きは上記の場合に準ずる。なお、図1の問題においては後件を満たすための条件を付与できない場合が存在しないので、否定的フィードバックは行わない。

他前件が成立し後件が不成立となる誤りについても、誤りの前件・後件に応じた図形変形規則を用いることで学習者の誤った推論を満たす図形を表示し、元の図形との差異を学習者に提示することで、学習者の行った推論の誤りを可視化することができる。

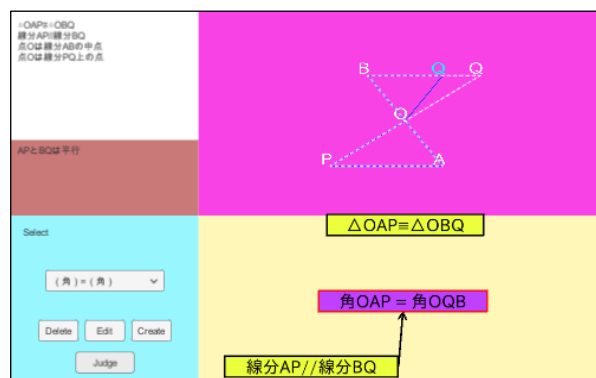


図1 提案手法による推論規則の誤りの可視化

### 4. まとめ

本研究では中学校数学科の三角形合同証明問題を対象として、学習者が行った推論に対してその誤りを可視化して提示するシステムに新たなフィードバックの手法を導入した。これにより、従来のシステムでは低い評価を得ていたフィードバックの改善が見込める。今後の課題として、1) 今回改善したフィードバックの評価、2) 中学校の授業実践での評価、3) 対象領域を広げるため、システムで扱うことのできる図形要素や図形概念を増やすこと、などが挙げられる。

#### 参考文献

- (1) 平嶋宗, 堀口知也 “「誤りからの学習」を指向した誤り可視化の試み”教育システム情報学会誌 21(3), 178-185 (2004)
- (2) 舟生日出男, 亀田卓司・平嶋宗 “幾何証明課題の解決過程における推論の誤りのインタラクティブな可視化”, 日本教育高学会論文誌 32(4), pp425-433 (2009)