

線形代数における行列簡約化アルゴリズム学習支援システム の開発と学習履歴の分析

樋口三郎^{*1}

^{*1} 龍谷大学先端理工学部

Development and analysis of a learning support system for the row reduction algorithms in linear algebra

Saburo Higuchi^{*1}

^{*1} Faculty of Advanced Science and Technology, Ryukoku University

大学初年次で学ぶ線形代数において、アルゴリズムにしたがった行列の変形を筆算で行えることは、理論の理解の上でも、実用的にも有用と考えられている。しかし筆算では、成分の加減乗除や転記などの非本質的なミスにより、学習者による理解や教授者による採点を困難にすることがある。本システムは非本質的なミスを防いで学習を支援するとともに、最終的な変形すなわち「計算過程」を構成するに至る「思考過程」のデータを取得し、教授者に提示する。本システムの学習者向けユーザーインターフェースと教授者向け表示の改善、授業での実践を報告する。

キーワード：線形代数，学習支援システム，モバイルデバイス，学習履歴

1 はじめに

何かの答を、学習が自ら構成した根拠とともに示せる、という学習目標を考える。この学習の2つの困難に着目する。1つは、テストで評価するときの解答時間が、答のみよりも答と根拠のほうが長くなる傾向にあることである。もう1つは、答が1つに定まるときにも正しい根拠は複数ある得るため、教授者やコンピュータによる採点やフィードバックにリソースを多く要することである。

数学で例をあげると、このような学習目標は、量や式の最終的な答を求められることに加え、計算過程や証明を正しく記述できるというものである。それぞれのテストは短答式と過程記述式に対応する。

「計算過程」を構成する際に、学習者は一般に試行錯誤を行う。すなわち、部分的な計算過程や誤った計算過程の構成を経て正しい計算過程に到達することがある。この「根拠や計算過程を構成する過程」のことをここでは「思考過程」と呼ぶ。足場かけとして思考過程に基づいて途中で介入を行うことで、学習を支援できる可能性がある。また、思考過程を記録し事後に分析することで、より効果的な学習支援を行える可能性がある。

数学で言えば、「思考過程」は消しゴムと鉛筆を使って答案を下書きしたり書き直したりする作業として現れる。これは動画などで記録できるが、含まれる情報が多く、分析するのは難しい。

著者は共同研究者とともに、このような問題意識

から、線形代数による行列の基本変形という、数学の特定の計算過程記述問題の学習・教授を支援するシステムを開発してきた^(1,2)。本システムは、アルゴリズムにしたがった行列の基本変形について、学習者による計算過程の構成を容易にする。また、「思考過程」を記録し可視化する。本システムを授業で試用し学習履歴データを取得した⁽³⁾。

本論文では、本システムへの機能の追加と、その授業での試用と学習履歴データの分析を報告する。

2 線形代数の基本変形アルゴリズム

行列の基本変形とは、次の3種の基本操作の有限列である⁽⁴⁾。

R1:swap 第 i 行と第 j ($\neq i$) 行を交換する

R2:mul 行列の i 行の全成分を係数 c ($\neq 0$) 倍する

R3:add 第 i 行を係数 a 倍して第 j ($\neq i$) 行に加える

基本変形は行列の階数や簡約形を変えないことから、与えられた行列に応じて基本操作を部品として並べて基本変形を構成し、与えられた行列を望ましい形に変形するアルゴリズムが多く知られている。ここでは、基本操作の列である基本変形が「計算過程」にあたる。このようなアルゴリズムの理解は、データサイエンスや広く理工学において重要である。

そのようなアルゴリズムとしてよく知られたものに掃き出し法（ガウスの消去法）がある。任意の行列を簡約形という標準形に変形するもので、連立1次方程式の求解や行列式の計算などに用いられる。

このアルゴリズムを自動で行うツールは多く存在するが、九九の暗記が有用であると同様に、アルゴリズムを筆算で実行できることは計算にも理論の理解にも有用と考えている数学の専門家は多い。

本システムでは、学習目標を、アルゴリズムに従って基本操作の列（計算過程）を構成し、最終的な行列を得られること、としている。

3 システムの概要

本システムはPC、スマートフォンのWebブラウザで、インターネット上のWebアプリケーションを利用するクライアントサーバシステムである。フロントエンドにはJavaScript、サーバサイドにPHPを使用している。

学習者のWebページには、変形対象の行列が表示される（図1）。本システムは実有理数成分の行列にのみ対応している。基本操作を1つ指定するのに必要なのは、種類(R1,R2,R3)、基本操作が働く行番号と有理数の係数である。学習者は、種類と行番号を画面上のタッチやクリックで指定する。有理数係数の入力については4.1節で述べる。

学習者は、基本操作の不適切な並べ方（誤った計算過程）を入力することはできるが、誤った部品（基本操作でないもの）を使うことはできない。筆算の場合に起こりうる誤りの一部を禁止して、学習者が基本操作とその順序の決定に集中することが足場かけとなっている。

ページには、その時点までに構成した基本変形（計算過程）と、変形結果の行列が表示される。学習者は、アルゴリズムの終了条件が満たされたと考えた時点で「完了宣言」ボタンをクリックする。実際に終了条件が満たされているかどうかが判定される。

システムは、学習者によるこれらすべての入力と、その段階の行列、時刻、学習者IDを1レコードとしてデータベースに記録する。各基本操作の所要時間や、ひとつの基本操作を取り消すUndoや完了宣言の実行が、筆算の最終的答案には含まれない「思考過程」に関わる情報である。

4 システムの改良

4.1 仮想キーボードの導入

基本操作R3では、有理数の係数を指定する必要がある。一般に有理数は $\pm n, \pm n/m$ の形で通常のキー

ボードでテキスト入力することが可能である。しかし、キャラクタ +, -, / と数字は、多くのスマートフォンキーボードで同時には表示されない。また、これらのキャラクタだけを許しても、有理数として意味のない文字列を入力することができてしまう。

著者と共同研究者の先行研究⁽²⁾では、HTMLのselect要素を用いて $1 \leq m, n \leq 99$ の範囲の $\pm m$ と n をそれぞれ、入力することで、誤りを防いでいた。しかし、複雑な有理数の入力には多量のスクロールが必要だった。

改良したシステムでは入力の労力と時間の軽減を意図してソフトウェアキーボードを導入した。jQuery UIを用いて構築された、jQueryのKeyboardプラグイン⁽⁵⁾で、0-9, +, -, / キーだけを表示した(図1)。学習者は画面上のキーをタッチまたはクリックして有理数を入力する。

4.2 変形過程の教授者向け表示

3節で述べた通り、学習者はページ下部でその時点までの基本変形を確認することができる(図1)。教授者が同様の過程を閲覧できることは、学習状況の分析の上で有用である。

そこで、基本変形と、各基本操作の所要時間に加え、その時点の行列と、各操作がアルゴリズムに従ったものかどうかのラベルを付加して、教授者向けに、事後に表示する改良を行った。図2で、上から順に、基本操作、直前の操作からの所要時間(秒)、操作後の行列(赤が階段部分、青が再帰的に階段化すべき部分)、基本操作の種類、ラベル、その日本語による説明、である。

ガウスの消去法は、行列に零の成分を増やし、階段の形を増やすアルゴリズムである。アルゴリズムとはいっても、基本操作の順序を完全には指定していない。例えば、成分0を持つ行を、0でない成分を持ついずれかの行と入れ替える、などの指示には不定性がある。プログラムとして書くときは、最初

表 1: 基本操作のラベルの定義

ラベル	意味
Best	階段を増やす基本操作
Good	零成分を増やす基本操作
Accepted	学習者の自由度で選択可能な基本操作
Bad	本来アルゴリズムの許さない零成分を減らす基本操作
Destroying	本来アルゴリズムの許さない階段を減らす基本操作
Other	初期化、完了宣言など

に現れた非零な行、のようにして無理に不定性を除くが、学習者が操作する際には、操作の適用結果が簡単な有理数になるものを選ぶような自由度を残すのが現実的である。そこで、その時点での基本操作がアルゴリズムに即しているかどうかを表1の5段階にラベル付けして表示している。Undoは逆基本操作とみなしてラベル付けした。

4.3 実践を行った授業への対応

先行研究⁽³⁾と異なる教科書⁽⁴⁾を用いた授業(5節)で使用するため、次の変更を行った。

2つの教科書で、基本操作R1,R2,R3の組は同じであるものの、番号、名称、記号が異なっていた。教科書の流儀に対応した表示とした。

先行研究⁽³⁾で実践した科目では、前進消去、後退消去のアルゴリズムを採用していた。一方、本報告で述べる科目では教科書⁽⁴⁾にしたがい、前進消去のみからなるアルゴリズムを採用した。これに対応して学習者用ページの終了宣言の判定を変更した。新たに実装した教授者向け表示(4.2節)のラベル付けもこれにしたがった。

5 実践と学習履歴の分析

著者を担当教員とする、理系大学1年次の線形代数の科目(履修登録130名)において本システムを試用した。当該授業はBYODの対面授業で全員がノートPCを持参することになっているが、本システムを



図 1: ソフトウェアキーボード

① $\times(-1)+④$ Undoする. ② $\times(-1)+④$ ③ $\times \frac{1}{4}$ ④ $\times(-2)+④$ Undoする.

7.497077 3.888702 39.337466 8.708064 4.770761 8.271311

→ $\begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ → $\begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ → $\begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ → $\begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ → $\begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ → $\begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

add undo add mul add undo

Destroyed Best Best Accepted 0 0 0 0 Best Destroyed

せっかく作った階段を壊しましたよ? ピボットを1つ進めたのですね。まっとうな変形です。 ピボットを1つ進めたのですね。まっとうな変形です。 許されてる変形ですが、もっと効率よい変形あるか考えてみましょう。 ピボットを1つ進めたのですね。せっかく作った階段を壊しましたよ?

図 2: 教授者向けの計算過程の表示 (部分)

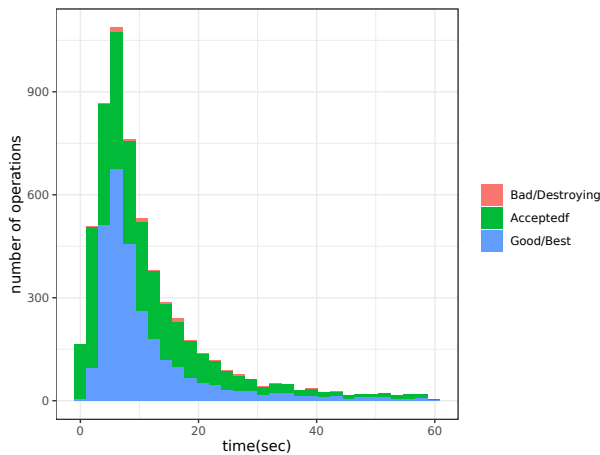


図 3: 所要時間の分布

使用するデバイスはPC, タブレット, スマートフォンいずれも可とした. 本システムを授業時間内で指示にしたがって使用すること, および授業内外の任意の時点で使用してよいことを伝えた. また, 本システムの使用は成績に算入しないこと, 「与えられた行列を簡約形にせよ」という問が, 本システムを使用しない, 筆算による小テストに出題されることを説明した.

本システムは, 学習者ごとの, 基本操作等 (Undo, 完了宣言を含む) の時系列データを取得する. したがって, 連続する2つの基本操作の間の経験遷移確率行列なども算出可能である. この実践では, 研究への使用に同意した受講生の操作の7294レコードを取得した.

5.1 ラベルと所要時間

全ユーザの全基本操作等について, 所要時間の分布を, 4.2節で述べたラベルごとの積み上げヒストグラムとして図3に示す.

所要時間は, 次に行うべき基本操作を導出する時間の和と, 本システムを操作する時間の和と考えられる. ピーク付近が, 本システムを操作する時間の代表的な値と考える. 一方, 学習者が基本操作を行った後, 数日間放置したような場合にも, システムのセッション管理の範囲内では続けた操作とみなして所要時間を計算することから, 分布は右に尾を引いている.

誤りに分類される Bad/Destroying のラベルが少ないことから, アルゴリズムを理解した状態でこのシステムを使用している受講者が多いことを示唆する. なお, Bad/Destroying の所要時間の中央値14.3秒は, Accepted 9.1秒, Good/Best 7.9秒よりも長かった.

5.2 思考過程における Undo の使用状況

先行研究⁽³⁾では, Undo回数の分析から思考過程の考察を行った. ここでは, ラベルごとに Undo がどのような頻度で選択されるかを調べた. 表2の通

表 2: Undo の使用回数の比較

基本操作等	直前のラベル	
	Bad/Destroying	任意
swap	1	338
mul	3	1053
add	30	3662
undo	38	740
他	9	1501
計	81	7294

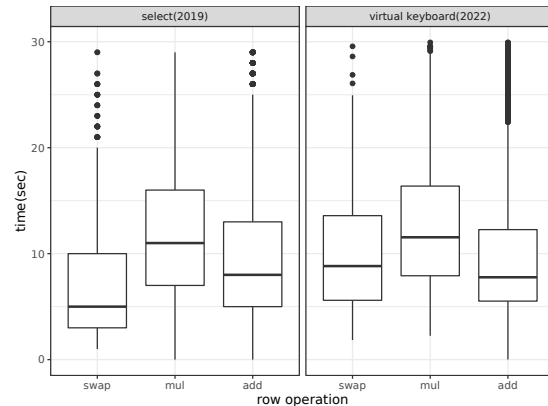


図 4: 入力方法, 基本操作による所要時間

り, Bad や Destroying のときに, それを打ち消すことに Undo を使う頻度が高いことを示す.

5.3 有理数係数入力方法と所要時間

3つの基本操作 R1:swap,R2:mul,R3:addのうち, R2,R3のみが, 有理数係数の入力を要する. これらについて, ソフトウェアキーボードによる2022年度の実践で入力に要した時間の分布を, select要素による2019年度の実践と対比して図4に示す.

被験者もタスクも異なるため, 単純な比較はできないが, R1とR2,R3の差が, 有理数入力に要する時間と関係する可能性がある. ソフトウェアキーボードのほうが, 差が小さい.

5.4 学習者の主観評価

学期末に行った科目のアンケートでの, 本システムに関する設問の回答結果を表3,4に示す. 本システムは肯定的に評価されていると考える. なお, この授業の学期後半では, 本システムを列基本変形を

学習に役立ちましたか	回答数
役立った	33
まあ役立った	14
あまり役立たなかった	6
役立たなかった	1

使いやすかったですか	回答数
使いやすい	25
まあ使いやすい	21
やや使いにくい	8
使いにくい	1

許す行列式の計算にも利用した。この節の回答はその利用後のものだが、本論文その他の結果には行列式の計算は含まない。

6 議論

4.2 節で述べた計算過程の表示は、操作完了後の学習者に対しても有効なフィードバックとなる可能性がある。さらに、学習者の計算過程構成中に、直前に選択した基本操作に対するフィードバックや、次に加える基本操作の選択に対するヒントを提示することが考えられる。

本論文で実践を報告した科目の小テストでは、有理数の加減乗除を含む筆算による基本変形ができるかどうかを評価している。本システムは、小テストの学習目標への足場かけとなることを意図しているが、学習目標は異なる。この違いが学習者に混乱を招いていないか、検討が必要である。

本システムは現在、テスト（評価）に特化した機能を有していないが、試験監督により参照、相談条件を課し、一定時間内に計算過程を構成してスクリーンショットを撮って提出するようなテストは可能と考える。

本システムは jQuery UI の Draggable プラグインと jQuery UI の修正 jQuery UI Touch Punch⁽⁶⁾ に基づいて開発されている。jQuery UI の開発は終了してい

るため、持続的な開発方針の検討が必要である。

7 おわりに

本報告では、行列簡約化アルゴリズム学習支援システムの改良、授業に即した修正、実践の学習履歴の分析を述べた。本システムをより汎用なものにすることに加え、学習者ごとの学習履歴の分析を行う予定である。

謝辞

本研究の一部は科研費（21H04412, 21H00921）の助成を受けた。

参考文献

- (1) 田中 円, 樋口三郎: “線形代数における計算アルゴリズム学習支援システムの開発と評価,” 教育システム情報学会研究会報告, vol.32, no.4, pp.47–52, Dec. 2017.
- (2) 樋口三郎: “モバイルデバイスに対応した線形代数における行列変形アルゴリズム学習システムの改良,” 教育システム情報学会 2020 年度全国大会論文集, pp.193–194, (2020).
- (3) 樋口三郎: “基本変形による行列簡約化の学習支援システムとその授業内での試用,” 京都大学数理解析研究所講究録, vol.2142, pp.169–173, (2020).
- (4) 加藤文元: 大学教養 線形代数, 数研出版, (2019).
- (5) R. Garrison: “Keyboard v1.30.4,” 2022. <https://mottie.github.io/Keyboard>.
- (6) D. Furfero: “jQuery UI Touch Punch v0.2.3,” 2014. <https://github.com/furf/jquery-ui-touch-punch>.