JSiSE Research Report
vol.35,no.3(2020-9)

# 自由度２の$\chi^2$分布に関する新しい教材の作成について

高木和久
高知工業高等専門学校

# New Approaches in Teaching $\chi$-square Tests

National Institute of Technology, Kochi College

$\chi$-square distributions are one of the most important distributions in deta science. $\chi$-square tests are used not only in data science but also in other academic areas. But $\chi$-square distributions are very difficult to understand. The author suggested some new approaches in teaching $\chi$-square distribution of degree two to high school and college students.

キーワード: $\chi^2$分布，自由度，信頼だ円，大数の法則

## 1. はじめに

$\chi^2$分布はデータサイエンスの分野で最も重要な分布の 1 つである.この分布は適合性や独立性の検定に使用されるため，統計にあまり詳しくない人向けの啓蒙書も多数出版されている.

独立性の検定ではクロス集計表が用いられる.具体例で見てみよう.ある大学には 3 つの食堂があるとする.ある日の昼食時間帯の利用者数を調査したところ，表 1 のようになった.

表１．３つの食堂の利用者数

| | A | B | C | 計 |
|---|---|---|---|---|
| 女 | 30 | 19 | 19 | 68 |
| 男 | 36 | 47 | 41 | 124 |
| 計 | 66 | 66 | 60 | 192 |

食堂 A と食堂 B の利用者数は同じであるが，食堂 A は女性の利用者が多いように思われる.このことを$\chi^2$検定を用いて確かめてみよう.男女の間で食堂の利用状況に差が無い，という帰無仮説を立てる.この場合の自由度は 2 である.

有意水準が 5%のとき，棄却域は $5.99 < T$である.この表の数値で検定統計量を計算すると$T = 4.54$であり，帰無仮説は棄却されない.

## 2. 自由度が２の$\chi^2$分布について

$n$個の確率変数$X_1$，$X_2$，…，$X_n$が互いに独立で，いずれも標準正規分布に従うとき，確率変数

$$X = X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2$$

の従う分布を自由度$n$の$\chi^2$分布という.

自由度$n$の$\chi^2$分布の確率密度関数を$f(x)$とすると

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}}}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

である.ここで$\Gamma(x)$は$\Gamma$関数

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$$

を表す.高等学校の数学（数学Ⅲなど）を全て履修している学生であっても，$\chi^2$分布の定義を理解することは困難である.

しかし，自由度$n$の値が 2 の場合は確率密度関数は

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

であり，高校生でも十分理解することができる.

図 1 に$f(x)$のグラフを示す.

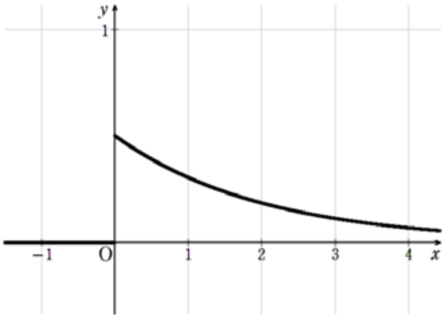

図１. 自由度 2 の$\chi^2$分布の確率密度関数

累積分布関数を求めると

$$\int_{-\infty}^{x} \frac{1}{2}\, e^{-\frac{t}{2}}\, dt = \int_{0}^{x} \frac{1}{2}\, e^{-\frac{t}{2}}\, dt = \left[-e^{-\frac{t}{2}}\right]_0^x = 1 - e^{-\frac{x}{2}}$$

となる.$\chi^2$検定では実数$p$に対し，$p \le x$となる確率が重要であるが，自由度が 2 の場合はこの値は

$$1 - \left(1 - e^{-\frac{p}{2}}\right) = e^{-\frac{p}{2}}$$

となる.例えば95%の信頼度で右側検定を行う場合の棄却域を求めるには

$$e^{-\frac{p}{2}} = 0.05 = \frac{1}{20}$$

とおいて$p$の値を計算すればよい.この計算は高校生でも容易に実行できて，結果は$p = 2\ \log 20 = 5.9915$となる.

ところで，$e^{-\frac{x}{2}}$という関数は崩壊定数 $\frac{1}{2}$ の減衰関数である.つまり，整数$k$に対して,

$$e^{-\frac{p+2k\log 2}{2}} = e^{-\frac{p}{2}}\, e^{-k\log 2} = \left(\frac{1}{2}\right)^k e^{-\frac{p}{2}}$$

が成り立つ.95%の信頼度で右側検定を行う場合の棄却域は$5.9915 < T$であった.信頼度 90%の棄却域の場合は面積が 2 倍になるので$k = -1$とおく.

$$2\ \log 20 - 2\ \log 2 = 2\ \log 10 = 4.6052$$

より，棄却域は$4.6052 < T$である.

一般に，検定について講義する際には手順だけの説明にとどまり，中身はブラックボックスになっていることが多い.仮説が棄却されるかどうかを判断する際に使われる数値を手計算で学生に求めさせることは，検定に対する理解を深める効果があると期待される.

## 3. 教材の実例

### 3.1 ２×３クロス集計表

第 1 章で扱ったクロス集計表について更に詳しくみてゆく. 表 1 の数値を百分率で与えた表 2 を学生に示して 男女の間で食堂の利用状況に差があるかどうかを問う.

表２. ３つの食堂の利用者の割合 (%)

| | A | B | C | 計 |
|---|---|---|---|---|
| 女 | 15.63 | 9.90 | 9.90 | 35.42 |
| 男 | 18.75 | 24.48 | 21.35 | 64.58 |
| 計 | 34.38 | 34.38 | 31.25 | 100 |

学生は何も疑わずに 15.63 などの数値を用いて$T$を計算して$T = 2.37$を得て，仮説を棄却しないという結論を得る. しかし，実際には百分率だけの表からは検定統計量$T$を計算することはできない.

表 3 は表 1 の数値を全て 2 倍したものである。

表３. 数値を２倍にした表

| | A | B | C | 計 |
|---|---|---|---|---|
| 女 | 60 | 38 | 38 | 136 |
| 男 | 72 | 94 | 82 | 248 |
| 計 | 132 | 132 | 120 | 384 |

この表を元に検定統計量$T$を計算すると$T = 9.09$となり, 仮説は棄却される. 百分率だけを与えた表 2 から, 矛盾する 2 つの結果が得られたことになる.

検定統計量$T$の定義を元にこの理由を調べる.
各セルの実現値を$x_i$，期待度数を$a_i$とすると，$T$は

$$T = \sum_{i=1}^{6} \frac{(x_i - a_i)^2}{a_i}$$

と表される.全ての $i$ について実現値が$k$倍になると期待度数も$k$倍になるため，$T$の値も$k$倍となる. $\chi^2$検定を行う場合には総数の情報が不可欠であることがわかる.

学生にエクセルの表を提供し,データを入力させて$T$の値がどのように変わるかを調べさせることは，$\chi^2$検定に対する理解を深める効果があると期待される.

### 3.2　２教科の偏差値について

試験の得点は正規分布に従うと言われている.$X$と$Y$を別々の試験の得点を元に計算した偏差値とする.$X$と$Y$は独立である.このとき $\frac{X-50}{10}$ と $\frac{Y-50}{10}$ は標準正規分布に従い，独立であるから，和

$$\left(\frac{X-50}{10}\right)^2+\left(\frac{Y-50}{10}\right)^2=\frac{(X-50)^2+(Y-50)^2}{100}$$

は自由度 2 の$\chi^2$分布に従う.そして

$$\frac{(X-50)^2+(Y-50)^2}{100}=5.991$$

は$XY$平面上の円を表し，この円の内側にデータの 95%が存在している.

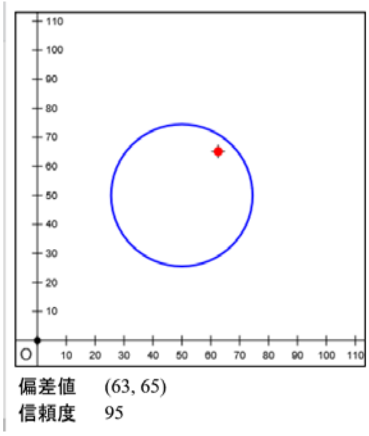


図２．２教科の偏差値と 95%信頼円

図 2 はデータがこの円（95%信頼円）の中にあるかどうかを確かめることのできるアプリの一画面で，点をドラッグするとその座標（偏差値の対）がリアルタイムで変化する.

### 3.3　サイコロを投げる

公平なサイコロを$n$回投げ，1 の目か 2 の目の出た回数の合計を$X$とする.$X$は二項分布$\mathrm{Bi}\left(n,\frac{1}{3}\right)$に従う.

このサイコロを再び$n$回投げ，偶数の目の出た回数を$Y$とする.$Y$は二項分布$\mathrm{Bi}\left(n,\frac{1}{2}\right)$に従う.$n$の値が大きいとき，二項分布$\mathrm{Bi}\left(n,\frac{1}{3}\right)$は正規分布$\mathrm{N}\left(\frac{n}{3},\frac{2}{9}n\right)$で近似でき，二項分布$\mathrm{Bi}\left(n,\frac{1}{2}\right)$は正規分布$\mathrm{N}\left(\frac{n}{2},\frac{n}{4}\right)$で近似できる.

$$T=\frac{\left(X-\frac{n}{3}\right)^2}{\frac{2}{9}n}+\frac{\left(Y-\frac{n}{2}\right)^2}{\frac{n}{4}}$$

とおくと，$T$は自由度 2 の$\chi^2$分布に従う.

信頼だ円の方程式は，$T=2\,(\log 20+k\ \log 2)$とおいて

$$\frac{\left(X-\frac{n}{3}\right)^2}{8}+\frac{\left(Y-\frac{n}{2}\right)^2}{9}=\frac{n}{18}(\log 20+k\ \log 2)$$

となる.図 3 に$n=50$のときの 95%信頼だ円と直線$Y=X$を示す.

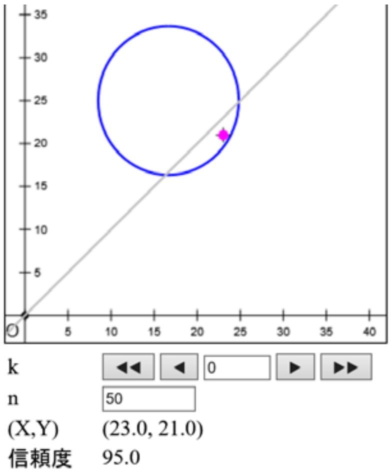


図３. 95%信頼だ円と直線$Y=X$

実際にサイコロを投げたとき，その結果は偶然に左右される.この例の場合は$Y>X$であることが期待されるが，$n=50$のときには 95%信頼だ円の内部に点(23,21)が入っている.つまり，$X\geq Y$であるような実験結果も十分起こりうるということである.

### 3.4　じゃんけんをする

ある人が$n$回じゃんけんをしたときに，勝った回数を$X$，負けた回数を$Y$，引き分けた回数を$Z$とする.

$X+Y+Z=n$であり，$(X,Y)$は三項分布に従う.統計量$T$を

$$T=\frac{3}{n}\left\{\left(X-\frac{n}{3}\right)^2+\left(Y-\frac{n}{3}\right)^2+\left(Z-\frac{n}{3}\right)^2\right\}$$

$$=\frac{3}{n}\left\{\left(X-\frac{n}{3}\right)^2+\left(Y-\frac{n}{3}\right)^2+\left(X+Y-\frac{2}{3}n\right)^2\right\}$$

とおくと$T$は自由度 2 の$\chi^2$分布に従う.

信頼だ円の方程式は

$$\left(X-\frac{n}{3}\right)^2+\left(Y-\frac{n}{3}\right)^2+\left(X+Y-\frac{2}{3}n\right)^2=\frac{2}{3}n(\log 20+k\ \log 2)$$

である.

### 3.5　男女６名から２名選ぶ

男子 4 名，女子 2 名から 2 名をランダムに選ぶ独立試行を$n$回繰り返す.男子が 2 名選ばれた回数を$X$, 男女が 1 名ずつ選ばれた回数を$Y$，女子が 2 名選ばれた回数を$Z$とする.

$X+Y+Z=n$であり，$(X,Y)$は三項分布に従う.統計量$T$を

$$T=\frac{\left(X-\frac{6}{15}n\right)^2}{\frac{6}{15}n}+\frac{\left(Y-\frac{8}{15}n\right)^2}{\frac{8}{15}n}+\frac{\left(Z-\frac{n}{15}\right)^2}{\frac{1}{15}n}$$

$$=\frac{5}{8n}\left\{4\left(X-\frac{2}{5}n\right)^2+3\left(Y-\frac{8}{15}n\right)^2+24\left(X+Y-\frac{14}{15}n\right)^2\right\}$$

とおくと$T$は自由度 2 の$\chi^2$分布に従う.

信頼だ円の方程式は

$$4\left(X-\frac{2}{5}n\right)^2+3\left(Y-\frac{8}{15}n\right)^2+24\left(X+Y-\frac{14}{15}n\right)^2$$

$$=\frac{16}{5}n(\log 20+k\ \log 2)$$

である.

## 4.　大数の法則の実証実験の検証

大数の法則の実証実験として，生徒にサイコロや硬貨を振らせる授業は以前から行われてきた. しかしこれらの授業において，なかなか期待する結果が得られないことが知られている [1] .

新しい学習指導要領では確率，統計分野の重要性が強調されており，大数の法則の実証実験を行う学校が今後増えてくることが予想される. その際に何回ぐらい生徒にサイコロを振らせれば十分なのか，その目安について数学的に考察する.

ここでは，2020 年 2 月 8 日に世田谷区立用賀中学校で行われた公開授業の実践例[2]を元に考察を進める. この公開授業では中学 2 年生のあるクラスに対し, 統計的確率と数学的確率を関連づけるため, 生徒に実際に硬貨を投げさせた.

2 枚の硬貨を投げたときの結果を，両方とも表，表と裏，両方とも裏の 3 通りに分類し，どの場合が最も起こりやすいかを事前に予想させた上で 2 人 1 組に分かれて実際に硬貨を投げて確かめさせた.事前の予想では 3 つの場合は全て等確率であるという意見が大勢であった.

2 枚の硬貨を 1 回投げた実験ではそれぞれの結果の数がほぼ同数であった.10 回投げさせても違いが明確にならず, 5 分間で可能な限り硬貨を投げさせた.

結果は，表と裏が出る場合の数がどの組でも最も多くなったが，比が 1：2：1 になるということがはっきりとはわかる所まではゆかなかった.

実験結果は偶然に左右され，事前に結果を知ることはもちろん不可能であったが，比が 1：2：1 になるということがはっきりとはわかる所まではゆかないことを事前に予測することはできた.

以下，この点について検証する. 公平な硬貨 2 枚を$n$回投げるとき, 2 枚とも表が出た回数を$X$，表と裏が 1 枚ずつであった回数を$Y$，2 枚とも裏が出た回数を$Z$とする.$X+Y+Z=n$であり，$(X,Y)$は三項分布に従う.統計量$T$を

$$T=\frac{\left(X-\frac{n}{4}\right)^2}{\frac{n}{4}}+\frac{\left(Y-\frac{n}{2}\right)^2}{\frac{n}{2}}+\frac{\left(Z-\frac{n}{4}\right)^2}{\frac{n}{4}}$$

$$=\frac{2}{n}\left\{2\left(X-\frac{n}{4}\right)^2+\left(Y-\frac{n}{2}\right)^2+2\left(X+Y-\frac{3}{4}n\right)^2\right\}$$

とおくと$T$は自由度 2 の$\chi^2$分布に従う.

信頼だ円の方程式は

$$2\left(X-\frac{n}{4}\right)^2+\left(Y-\frac{n}{2}\right)^2+2\left(X+Y-\frac{3}{4}n\right)^2=n(\log 20+k\ \log 2)$$

である.$n=10$, $k=0$(信頼度 95%)の場合の信頼だ円を図 4 に示す.

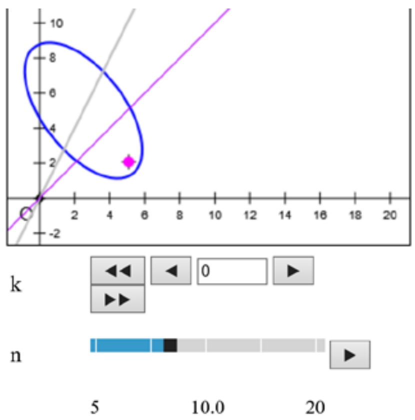


図４．$n=10$のときの 95%信頼だ円

図 4 の 2 本の直線は$Y=X$と$Y=2X$であり，だ円の中心は直線$Y=2X$上にある.だ円内に表示されている点の座標は(5,2)である.このことは，試行回数が 10 回のとき,2 枚とも表が出た回数が 5 回，表と裏が 1 枚ずつ出た回数が 2 回という極端な結果も十分起こりうることを示している.

さて,95%信頼だ円の方程式は

$$2\left(X-\frac{n}{4}\right)^2+\left(Y-\frac{n}{2}\right)^2+2\left(X+Y-\frac{3}{4}n\right)^2=n\log 20$$

である.左辺を標準形に直すと

$$\frac{7-\sqrt{17}}{2}\left(x-\frac{n}{4}\right)^2+\frac{7+\sqrt{17}}{2}\left(y-\frac{n}{2}\right)^2=n\log 20$$

この式からだ円の外接円の方程式を求めると

$$\left(X-\frac{n}{4}\right)^2+\left(Y-\frac{n}{2}\right)^2=\frac{2}{7-\sqrt{17}}n\log 20=2.08\,n$$

となる．点$\left(\frac{n}{4},\frac{n}{2}\right)$と直線$Y=X$の距離は

$$\frac{\left|\frac{n}{2}-\frac{n}{4}\right|}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}n}{8}$$

である．外接円が直線$Y=X$の上側にあるためには

$$2.08\,n<\left(\frac{\sqrt{2}n}{8}\right)^2=\frac{n^2}{32}$$

が成り立つ事が必要である.この式より$66.56<n$を得る．$n=100$のときの 95%信頼だ円と直線$Y=X$を図 5 に示す.

$n$の値を増やしてゆくと，だ円は必ず直線$Y=X$と交わらなくなる.このことは大数の法則のひとつの可視化になっている.

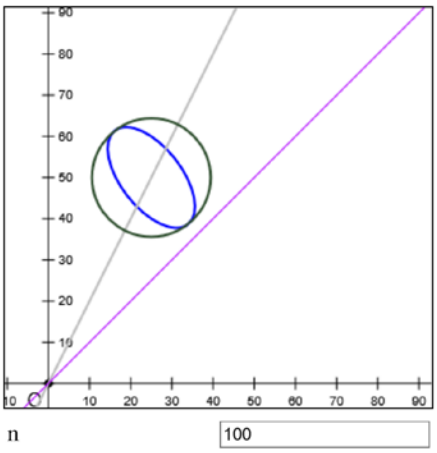


**図５．$n=100$のときの 95%信頼だ円とその外接円**

公開授業における生徒の事前の予想では 3 つの場合は全て等確率であるというものであった.これを帰無仮説として$\chi^2$検定を行う.この場合の検定量$T$は

$$T=\frac{3}{n}\left\{\left(X-\frac{n}{3}\right)^2+\left(Y-\frac{n}{3}\right)^2+\left(X+Y-\frac{2}{3}n\right)^2\right\}$$

である.$T=2(\log 20+k\ \log 2)$とおくと信頼だ円の方程式

$$\left(X-\frac{n}{3}\right)^2+\left(Y-\frac{n}{3}\right)^2+\left(X+Y-\frac{2}{3}n\right)^2$$

$$=\frac{2}{3}n(\log 20+k\ \log 2)$$

が得られる.

$n=150,\ k=0$（信頼度 95%)の場合の信頼だ円を図 6 に示す.だ円の中心は直線$Y=X$上にある.

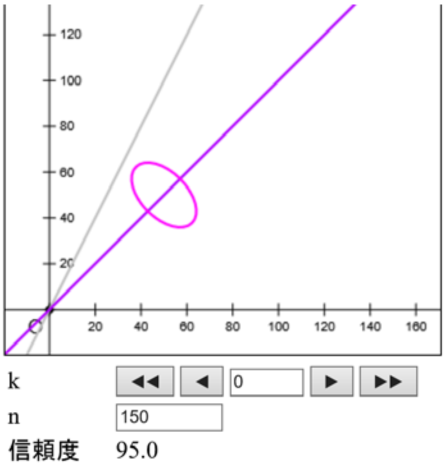


**図６． 95%信頼だ円と直線$Y=X$**

図 6 に信頼だ円

$$2\left(X-\frac{n}{4}\right)^2+\left(Y-\frac{n}{2}\right)^2+2\left(X+Y-\frac{3}{4}n\right)^2$$

$$=150(\log 20+k\ \log 2)$$

を描き加えたものを図 7 に示す.

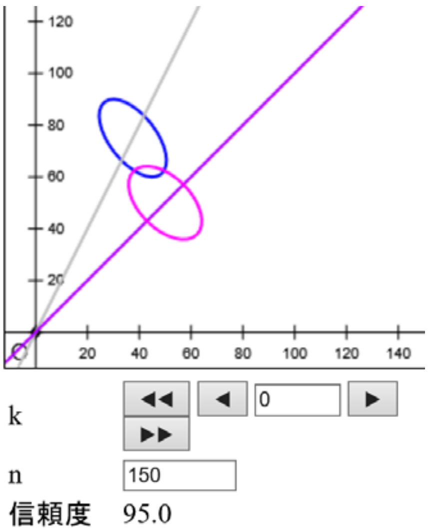


**図７. 2 つの 95%信頼だ円**

2 つの信頼だ円は交わっており，実験結果によっては帰無仮説を棄却できない場合が起こりうることがわかる.試行回数を増やして，例えば $n = 250$としたときの 2 つの信頼だ円を図８に示す.

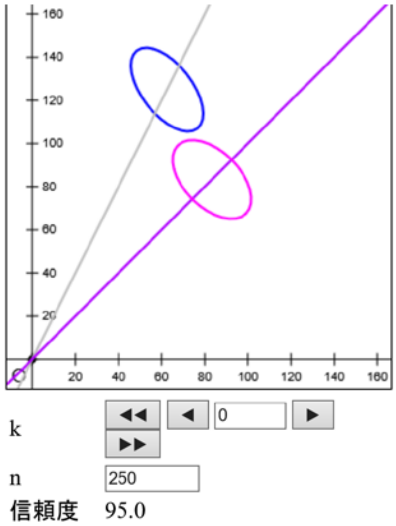


図８.交わらない 2 つの 95%信頼だ円

試行回数$n$が大きくなると 2 つの信頼だ円は交わらなくなる.そして実験結果をもとに$\chi^2$検定を行うと，3 つの場合が等確率で起きるという帰無仮説が棄却されるようになる.

同様に，$m$を 2 でない任意の実数として，表と裏が 1 枚づつ出る確率が 2 枚とも表の出る確率の$m$倍であるという帰無仮説を立てたとき，$n$を大きくするとこの帰無仮説は必ず棄却されるようになる.このことは大数の法則のひとつの表現になっている.

## 5. おわりに

$\chi^2$検定は数学の専門家だけではなく，例えば医療従事者が行うこともある.しかし$\chi^2$分布はその定義が難しく，統計の専門家でない人は，ややもすると検定の手順を覚えるだけになりがちである.

学習指導要領が変わり，統計の内容が小中高に数多く含まれるようになった.高等学校の数学 B では統計的な推測について取り扱う.$\chi^2$分布を高校生に教えることは大変難しいが，自由度が 2 の$\chi^2$分布については工夫をすれば高校生でもその仕組みを理解することができる. 今後，日本人の確率・統計に関する知識や認識がどんどん向上してゆくことを期待したい.

## 参 考 文 献


(1)岡崎知之，大数（ダイス）の法則，第 86 回数学教育実践研究会

http://izumi-math.jp/T_Okazaki/86_okazaki.pdf

(2020.8.25 最終確認)

(2) 第５回授業づくり研究会報告， 日本数学教育学会誌第 102 巻第 5 号，pp.43-50

(3)日本学術会議，『提言』：新学習指導要領下での算数・数学教育の円滑な実施に向けた緊急提言 ： 統計教育の実効性の向上に焦点を当てて(2020.8.4)

http://www.scj.go.jp/ja/info/kohyo/pdf/kohyo-24-t293-2.pdf (2020.8.25 最終確認)