

数学 e ラーニングシステム STACK を用いた

計算問題の誤答分析

中村泰之^{*1}, 樋口三郎^{*2}, 吉富賢太郎^{*3}, 宮崎佳典^{*4}, 市川裕子^{*5}, 中原敬広^{*6}

*1 名古屋大学, *2 龍谷大学, *3 大阪府立大学, *4 静岡大学, *5 東京高専, *6 合同会社三玄舎,

Analyzing Incorrect Answers of Culculus Using Mathematics e-Learning system STACK

Y. Nakamura^{*1}, S. Higuchi^{*2}, K. Yoshitomi^{*3}, Y. Miyazaki^{*4}, Y. Ichikawa^{*5}, T. Nakahara^{*6}

*1 Nagoya U., *2 Ryukoku U., *3 Osaka Pref. U., *4 Shizuoka U., *5 NIT Tokyo C.,
*6 Sangensha LLC.

In this paper, we analyze mathematical online quiz data stored in mathematics e-Learning system STACK. We specifically focused on investigating various types of differentiation of composite functions. In order to classify incorrect answers, automatic classification was carried out with the use of the Potential Response Tree that was embedded in STACK. It was shown how the levels of students' understandings are identified by classifying incorrect answers. It was also revealed that, for a differentiation of $f(g(x))$ of its correct answer $f'(g(x))g'(x)$, with different $f(x)$'s and $g(x)$'s on the whole. The result itself will match the instinct of experienced teachers who have tacit knowledges, which is helpful for novice teachers on the site to guide students.

キーワード: 誤答分析, 合成関数の微分, STACK

1. はじめに

学習管理システム (Learning Management System, LMS) の利用が普及し, 重要な機能の一つとしてオンラインテストが提供されている。即時採点・フィードバックが可能であり, 学習内容の理解度の確認, またドリル的な利用により学習内容の定着を目的として活用されている。従来は正誤判定式, 多肢選択式, 短答式などが主な問題形式であったが, 近年では理数系科目での利用を目的として, 解答として入力された数式の自動採点を可能にするオンラインテストシステム (数学 e ラーニングシステム) の利用が広がりつつある。国内外で利用されているシステムとしては, STACK^(1, 2), MATH ON WEB⁽³⁾, Möbius Assessment⁽⁴⁾, WeBWorK⁽⁵⁾, Numbas⁽⁶⁾などが挙げられる。

従来の問題形式は, 候補となる選択肢の中から正答

を選ぶことにより解答する形式であったが, 数式入力形式の場合は, 入力される数式は一意でない。例えば, $\frac{d}{dx}(2x+1)^3$ という微分の計算問題の場合, 正答は $6(2x+1)^2$ であるが, 展開された $24x^2+24x+6$ も代数的に等価であるという意味では正答ではある。しかし, 後者の場合, 解答者は合成関数の微分について忘れていたかもしれないし, $3(2x+1)^2$ という解答が提示された場合には, 合成関数の微分について十分に理解できていないことも推測される。したがって, 数式解答形式のオンラインテストでは, 解答の正誤評価だけでなく, 誤答から学生の理解度を推測することが重要になってくる。計算問題において誤答を分類することにより, 学生の理解度を推定すること, また, どのような誤答をたどって正答に至ったかという解答過程から, 学生の理解の定着過程を知ることを見据えて, 本研究では, いくつかの計算問題例に対して, 数学 e ラーニングシステム STACK を活用した誤答分類の

方法について報告する。すでに予備的な研究により、誤答の傾向については把握することができたが⁽⁷⁾、今回は効率的な誤答分類方法の確立を目指して、STACK のポテンシャル・レスポンス・ツリー(PRT)の活用について検討を行う。

2. STACK の概要

2.1 解答の正誤評価

図 1 に、STACK で $\sin^4 x$ を微分する問題とその解答に対する評価の様子が例示されている。解答は STACK が採用している数式処理システム Maxima の書式により入力するが、まず視覚的に認識されやすい表記で確認が行われ、その後に正誤評価がなされる。また、単に正解か不正解かだけでなく、最後の例のように部分点をつけることも可能である。部分点については、問題を設計する際、解答の形式に応じてどのような配点、フィードバックを与えるかを定めることができ、これはポテンシャル・レスポンス・ツリーという機構で実現されている。

Figure 1 consists of three screenshots of the STACK interface showing the evaluation of the derivative of $\sin^4 x$. Each screenshot includes the question text, the user's input, the system's feedback, and the score.

- Top Screenshot:** The user input is $4 \cdot \cos(x)^3$. The system feedback says "あなたの入力した数式は次のとおりです: $4 \cdot \cos^3 x$ ". The score is 0.00/1.00.
- Middle Screenshot:** The user input is $4 \cdot \sin^3 x$. The system feedback says "あなたの入力した数式は次のとおりです: $4 \cdot \sin^3 x$ ". The score is 0.10/1.00.
- Bottom Screenshot:** The user input is $4 \cdot \sin(x)^3 \cdot \cos(x)$. The system feedback says "あなたの入力した数式は次のとおりです: $4 \cdot \sin^3 x \cdot \cos(x)$ ". The score is 1.00/1.00.

図 1 STACK による解答の評価

2.2 ポテンシャル・レスポンス・ツリー

STACK では、前節で見た解答の評価はポテンシャル・レスポンス・ツリー(PRT)で処理される。具体的な例としては次のとおりである。なお、次の箇条書きの番号は図内のノード (青丸) 番号に対応する。

- このノード解答と正答 $4 \sin^3 x \cos x$ とが代数的に等価である (真) か等価でない (偽) かどうかを評価する。具体的には、「解答-正答」がゼロであるかどうかを、数式処理によって評価を行う。もし真であれば緑の分岐により、正答として評価を終了し、偽の場合はノード 2 に移る
- 解答が $\cos^4 x$ であるかどうかを判定する。もし真の場合は「あなたは、三角関数の微分については理解しているようです。ただし、 x^n の微分について思い出してください。」というフィードバックを表示し、部分点として 0.1 点を与える。偽の場合ノード 3 に移る。
- 解答が $4 \sin^3 x$ であるかどうかを判定する。もし真の場合は「あなたは、三角関数の微分につ

いては理解しているようです。ただし、合成関数の微分のチェインルールを思い出してください。」というフィードバックを表示し、部分点として 0.1 点を与える。偽の場合は最終的に 0 点として終了する。

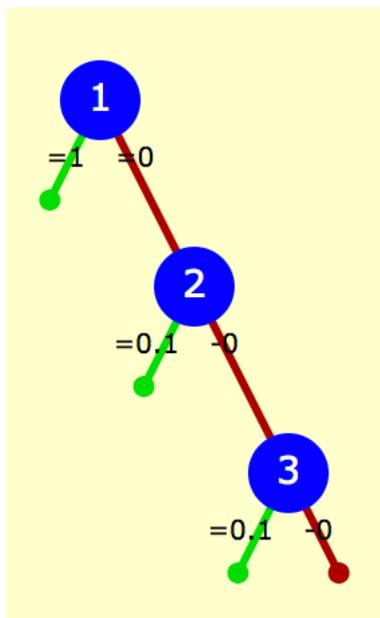


図 2 ポテンシャル・レスポンス・ツリー概念図

このように、PRT により部分点まで含めた解答の柔軟な評価が可能であり、解答に応じて適切なフィードバックを返すことにより、学生に気づきを与え、自習ドリルシステムとしての利用も期待される

2.3 誤答分類のための PRT の必要性

PRT は元々解答の柔軟な評価を可能にするために考案されたものだが、学生の解答が誤答であった場合、どのような誤答であったかを把握し、どこで躓きやすいかといった誤答の傾向を調べることに応用できる。また、何度か解き直して正答に至った場合、どのような誤答を経て正答に至ったかを検証することで、学生の思考過程を調べることもつながると期待される。

我々の予備的な研究では、 $f(g(x))$ の形の合成関数の微分の問題の誤答分析を行った。取り上げた問題ではシンプルな PRT が適用されており、その PRT では分類しきれない誤答の種類については、一つ一つの誤答を目視により分類を行わざるを得なかった。 $f(x) = x^l$, $g(x) = ax^n + bx^m + c$ の形式の誤答分類の結果は

表 1 のとおりである。誤答のうち、予想通り「分類 2」のタイプが多いが、予想しなかった「分類 5」も多く見られ、様々な誤答タイプを想定して、系統的に分類を行う必要があることが、予備調査から明らかになった。その系統的分類のために、本研究では、詳細な PRT の設計を行った。

表 1 $f(x) = x^l$, $g(x) = ax^n + bx^m + c$ の誤答分類例

分類	誤答タイプ	頻度
1	(正答)	32
2	$f'(g(x))$	15
3	$f'(g'(x))$	8
4	$f'(g'(x))$ ただし $f'(x) = x^{n-1}$ の適用	4
5	$f'(g'(x))g(x)$	7
6	$f'(g(x))g(x)$	2

3. 誤答分類のための PRT の設計

学生の様々な解答の分類のために、STACK が採用している Maxima の関数を駆使して、PRT を設計する。

4. おわりに

数学 e ラーニングシステムで出題された計算問題において誤答を分類することにより、学生の理解度を推定すること、また、どのような誤答をたどって正答に至ったかという解答過程から、学生の理解の定着過程を知ることを見据えて、本研究では、いくつかの計算問題例に対して、数学 e ラーニングシステム STACK を活用した誤答分類の方法について報告した。具体的には、元々解答の評価とフィードバックの提示のために考案されたポテンシャル・レスポンス・ツリーにおいて、Maxima の関数を駆使することで、誤答の分類を自動化することができ、系統的な誤答分類が可能になることを確認した。また、STACK に用意されている「STACK 解答解析」の機能を活用することにより、統計的な処理を行うことができた。

謝辞

本研究は JSPS 科研費 18H01069 の助成を受けたものです。

参 考 文 献

- (1) Sangwin, C.: “Computer Aided Assessment of Mathematics”, Oxford University Press (2013)
- (2) STACK | The University of Edinburgh,
<https://www.ed.ac.uk/mathes/stack/> (2019年6月13日
確認)
- (3) Kawazoe, M. and Yoshitomi, K.: “E-learning / e-assessment systems based on webMathematica for university mathematics education”, MSOR Connections, 15, pp. 17-24 (2017)
- (4) Möbius Assessment – Online Assessment System for STEM Courses | DigitalED,
<https://www.digitaled.com/products/assessment/>
(2019年6月13日確認)
- (5) Welcome to WeBWork, <http://webwork.maa.org/> (2019
年6月13日確認)
- (6) Really versatile maths e-assessment | Numbas,
<https://www.numbas.org.uk/> (2019年6月13日確認)
- (7) Nakamura, Y., Ichikawa, Y., Miyazaki, Y. Yoshitomi, K., Higuchi, S. and Nakahara, T.: “An attempt to analyze mathematical question-solving processes using STACK”, Proc. SITE International Conference, AACE (2019)