

動画とプログラミングを活用した 数学の授業について

高木和久
高知工業高等専門学校

Lessons of Mathematics with Programmable Applications

Kazuhisa TAKAGI
National Institute of Technology, Kochi college

The author made applications for students by which they can study mathematics much better. These applications treats mathematical contents such as cycloid, cardioid, trigonometric inequalities, parabola, ellipse, and so on. Students can input a program so that they can control the application. Short movies are also available. Students can learn by watching the movies. After watching them they can try the application which they saw in the movie.

キーワード: プログラミング, 動的オブジェクト, 高大接続改革, 数学教育, ICT

1. はじめに

平成 32 年度より施行される次期学習指導要領では小学校や中学校においてプログラミング教育を行うこととされている。その結果, 将来的には高等学校に進学する全ての生徒がプログラミングの素養を身につけていることになり, 高等学校における数学教育においてもプログラミングを用いたより深い学びが可能となる。

具体的にどのような内容の授業が可能になるかを今から検討しておくことは重要である。筆者は 2017 年 10 月よりプログラミングを取り入れた数学の授業を行っている。(1)

また, 現在高大接続の改革が進行中であり, 「高校生のための学びの基礎診断(仮称)」を平成 31 年度から, 「大学入学共通テスト」を平成 32 年度から段階的に実施される。これらのテストはコンピュータを用いた CBT 方式で行われるが, 数学では動的オブジェクトの利用が想定されている。

筆者は JavaScript を用いて動的オブジェクトを作成し, 2016 年より数学の授業で使用している ([3,4])。今回, プログラミングを利用した数学の授業を行うにあたって, 図 1 に示すような動的オブジェクトを用意した。

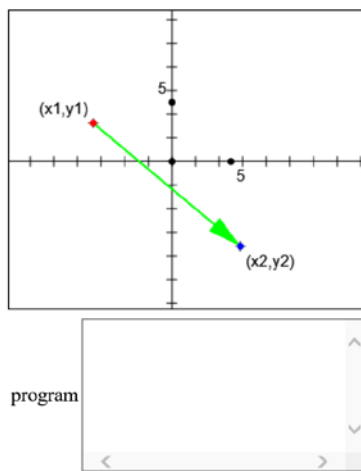


図 1. プログラム入力枠のある動的オブジェクト

この動的オブジェクトにはプログラムの入力のための枠のあることが特徴である。プログラムを入力する前は 2 点 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ は独立して動かす（ドラッグする）ことができる。プログラム入力欄に

$$x_2 = x_1 + 10$$

$$y_2 = y_1 + 10$$

と入力すると、2 点 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ の一方を動かすと他方もそれに連動して動くようになる。（図 2）

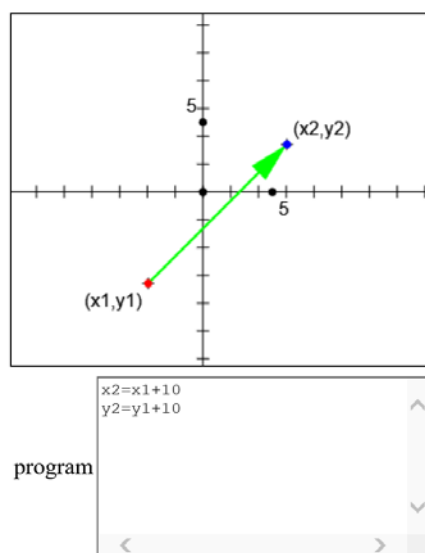


図 2. プログラムを入力したところ

授業では、一人が一台のパソコンまたはタブレット端末を利用できる環境で各自にプログラムを入力させ、その結果を見ながら数学を学習させた。本論文ではその実践例について述べる。

2. 数学教育におけるプログラミングの利用

以下に授業で用いた教材の例を述べる。

2.1 円錐曲線を描く

円、だ円、放物線、双曲線は円錐曲線と呼ばれ、高等学校の数学の重要なテーマである。数学の授業の中でプログラミングを用いることにより内容の理解を深める、という一連の授業の最初のテーマとして、パラメータを用いた円錐曲線の描画を扱った。

図 3 は 2 行のプログラム

$$x_1 = \cos(t)$$

$$y_1 = \sin(t)$$

を入力して原点中心、半径 1 の円を描いたものである。

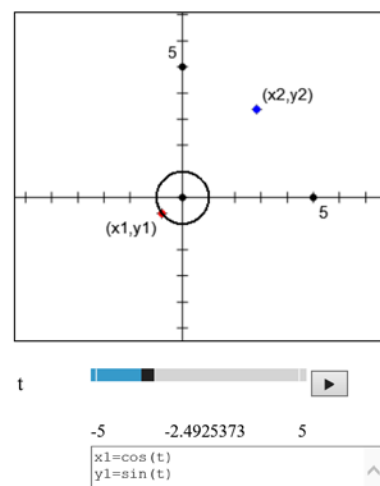


図 3. パラメータ t を用いた単位円の描画

プログラムに

$$x_2 = 2 * \cos(t)$$

$$y_2 = \sin(t)$$

を追加するとだ円が描かれる。学生の中にプログラムを間違えて

$$x_2 = \cos(2 * t)$$

$$y_2 = \sin(t)$$

と入力し、図 4 のようなグラフになった者がいた。

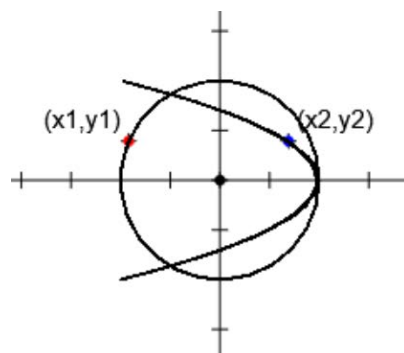


図 4. 入力ミスにより間違ったグラフが描画された

机間巡視の際にこの学生を発見し、「このグラフは放物線になっているね. なぜ (だ円ではなくて) 放物線が描かれたかを考えてみよう. 」と声をかけた.

第1学年で習う2倍角の公式という公式があり, この公式を使うと例示したプログラムで放物線が描かれることが理解できる. 今回の間違いは事前に想定したものではなかったが, 教員が用意した完全なプログラムをただ単に実行させるのではなく, 学生ひとりひとりがプログラムを入力する授業実践の中で, より深く数学を学ばせることができた貴重な体験であった.

2.2 サイクロイドの描画

サイクロイドは数式

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$$

によって定義される曲線で, 円が直線の上を滑らないように転がるときに円上の1点が描く軌跡であり, 1599年にガリレオ・ガリレイによって命名された. (図5)

従来の授業では黒板に図を書いて説明するが, 円が転がる様子をアニメーションで見せた方がより良く理解できる. プログラムも2行ですむ簡単なもので, 全ての学生が無理なく理解できていた.

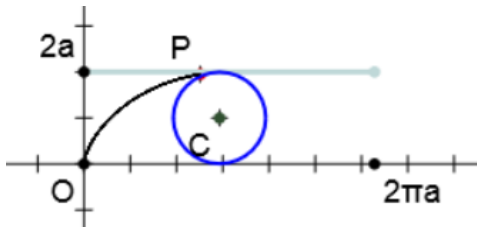


図5. サイクロイドの描画

2.3 カージオイドの描画

カージオイドは極座標で, 数式

$$r = a(1 + \cos \theta)$$

によって定義される曲線で, 円が同じ半径の円の回りを滑らないように回転するとき円上の1点が描く軌跡である. (図6)

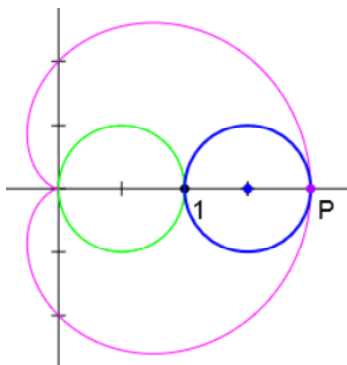


図6. カージオイドの描画

右の円が左の円の周囲を回転する時の点Pの軌跡はカージオイドになる. 右の円の中心の座標を (x_1, y_1) としたとき, プログラムは

$$x1 = \cos(t) + 0.5$$

$$y1 = \sin(t)$$

である.

2.4 数学検定準2級の問題より

2017年の数学検定準2級で次の問題が出題された. 半径 a の円が2つあり, 中心が C の円が原点が中心の円の回りを回ります. 中心が C の円が1周したとき, この円は何回転していますか.

先ほどのカージオイドの問題と関連があるので授業で取り上げたが, 1回転という誤答が数多く見られた. そこで円が円の回りを回転するプログラムを作成し, この問題をより深く考えさせた. 図7の点Pの座標を (x_1, y_1) , 点Cの座標が (x_2, y_2) とすると

$$x_1 = 2a \cos t - a \cos 2t, y_1 = 2a \sin t - a \sin 2t$$

となり, $2t$ の項があるので外側の円が2回転することがわかる.

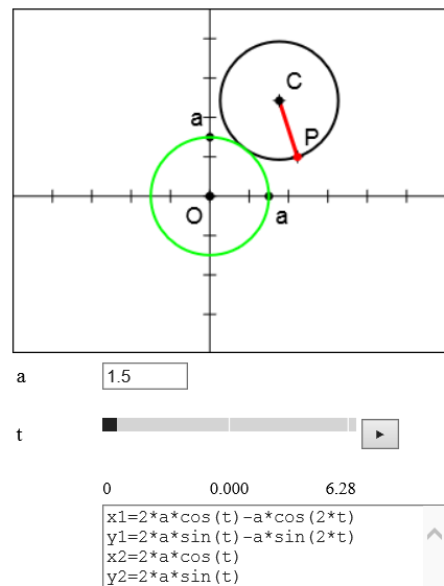


図7. 外側の円は何回転するか

2.5 三角不等式

三角方程式と三角不等式は高等学校の数学における重要なテーマである. しかし, 三角方程式は解けても三角不等式を苦手とする学生は多い. そこで三角不等式を解くプログラムを学生に入力させて理解を深める授業を行った. 例えば, 三角不等式 $2 \cos \theta > -\sqrt{3}$ を $0 \leq \theta < 2\pi$ の範囲で解くと $0 \leq \theta < \frac{5}{6}\pi, \frac{7}{6}\pi < \theta < 2\pi$ が解となる. プログラムを

```

If(2*cos(t)>-sqrt(3)){
x1=cos(t)
y1=sin(t)
}else{
x1=0
y1=0
}

```

と入力して実行すると三角不等式の解が表示される。(図 8) 不等式に応じて If 文の中を変更する必要があるが、問題なく学習できていた。

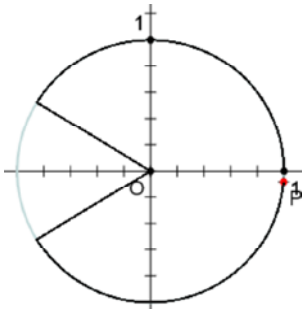


図 8. 三角不等式の解が表示された

2.6 逆関数のグラフ

関数 $y = f(x)$ に対して、 $f(g(x)) = g(f(x)) = x$ を満たす関数 $y = g(x)$ を $y = f(x)$ の逆関数という。いろいろな関数について $y = f(x)$ を数式で与え、その逆関数をプログラムで計算してグラフを描かせた。(図 9)

どの関数の場合にも、元の関数のグラフと逆関数のグラフは直線 $y = x$ に関して対称になっていることを確かめさせることができた。

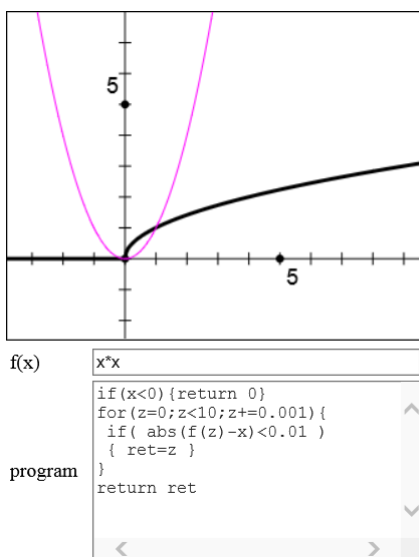


図 9. 逆関数のグラフ

2.7 パラボラアンテナの原理

パラボラアンテナの形状は放物面であり、衛星からの電波が反射して焦点に集まる性質を利用している。

授業では光の進む方向を逆にして、放物線 $y = 2\sqrt{x}$ の焦点 $F(1,0)$ から出発した光が放物線で反射して x 軸に平行に進む様子をプログラムで表現させた。(図 10)

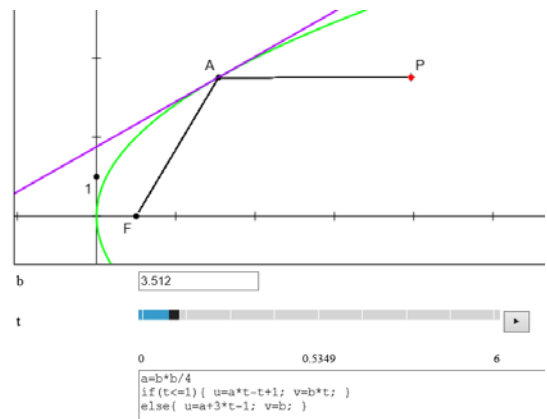


図 10. 放物面で反射する光の軌跡

2.8 だ円ビリヤードの原理

だ円の焦点から出た光はだ円で反射した後もう一方の焦点を通る。縁がだ円の形のビリヤードを作り、焦点の位置に球を置いて打つと縁で跳ね返ってもう一方の焦点を通る。これが だ円ビリヤードである。この反射の様子をプログラムで表現させた。(図 11)

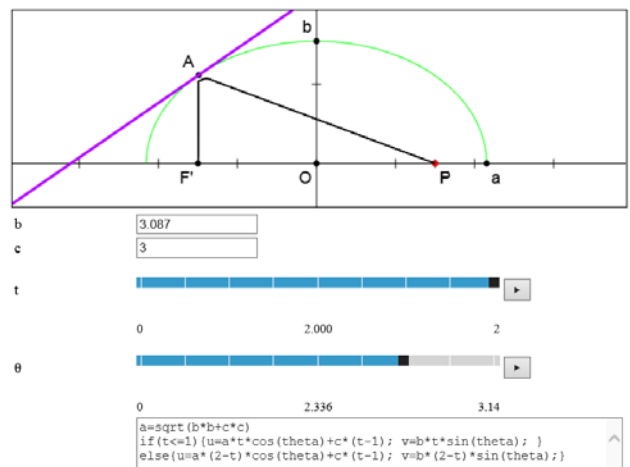


図 11. だ円で反射する光の軌跡

2.9 標準正規分布

標準正規分布は偏差値の根拠となる重要な分布である。これまで標準正規分布に関して学生に計算をさせる際は、紙の教科書の最後にある数表を使うか、あるいは表計算ソフトの統計関数を用いるかであった。

標準正規分布表は $y = e^{-\frac{x^2}{2}}$ のグラフと x 軸に囲まれる部分の面積の表であるから、プログラムを用いて計算することができる。(図 12)

数表は計算の根拠が不明であって、そこからより深い学びに導くことは困難である。しかしプログラムで計算過程を明らかにすることで、例えば区分求積法の

分割の数を 10000 にすれば表と同じ精度の近似値が得られることを学生に発見させることができる。

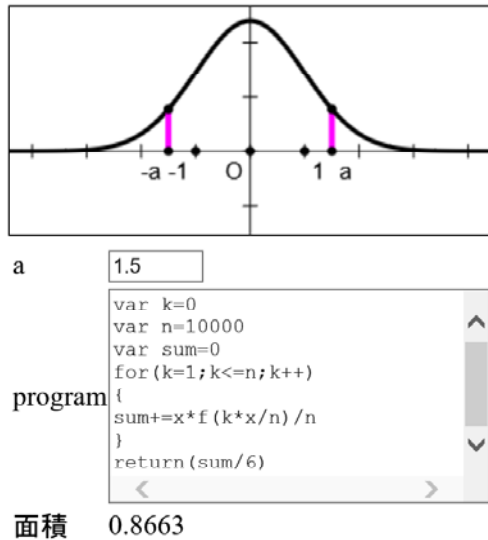


図 12. 標準正規分布

2.10 サイクロイドの等時性

参考文献([8])では、高等学校の3年生に対してサイクロイドの等時性を学ばせる授業の実践事例が報告されている。サイクロイドの等時性とは、サイクロイドの形をしたカーブを球が転がり、最下点まで到達するまでの時間が、出発点の高さによらず一定である事実を指す。この授業ではコンピュータは用いずに紙のプリントを見ながら力学的エネルギー保存則を用いて計算で結果を導くよう指導している。

サイクロイド曲線に沿って球が転がり落ちる様子をアニメーションで見ることができれば、より深い学びができることは間違いない。この運動の様子を図 13 に示す。

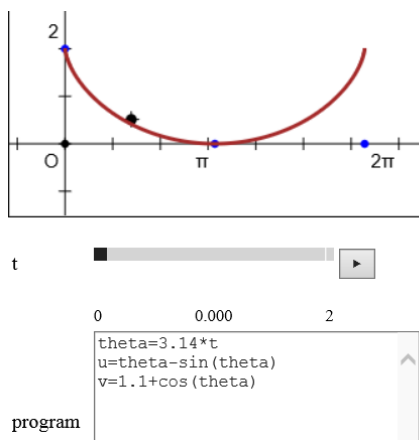


図 13. サイクロイドを転がる球の運動の様子

等時性を示すためには力学的エネルギー保存則を用いて計算をしてからプログラムを作成する必要が

あり、学生には筆者の作成したプログラムを実行することだけを指示した。(図 14)

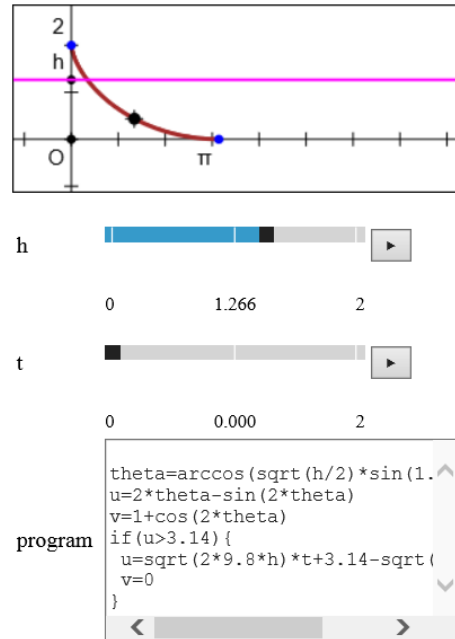


図 14. サイクロイドの等時性

2.11 1次変換に関する動画

1次変換の単元では動画を作成した。動画の中では、これまで説明してきたプログラミング可能な動的オブジェクトが解説のために用いられている。(図 15)

例えば、 x 軸に関する対称移動は

$$\begin{cases} x_2 = x_1 \\ y_2 = -y_1 \end{cases}$$

という関係式で表わされる。プログラム欄に記述されたプログラムもこれと同じ形になっており、数式通りにプログラムを記述することで平面上の点の変換を視覚的に理解することができる。

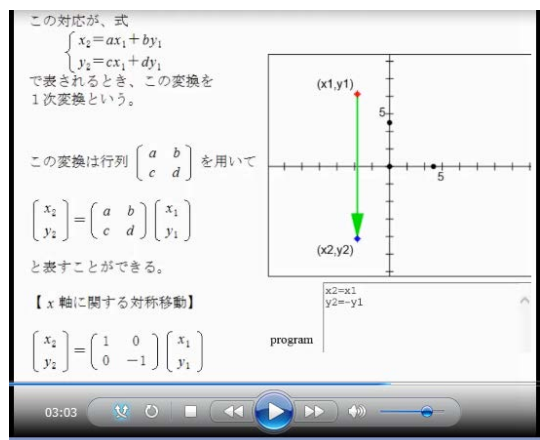


図 15. x 軸に関する対称移動の解説動画

教科書に図のある問題についても、ポイントとなる点を動かして見せることにより、より学生の理解を高めることができる。(図 16)

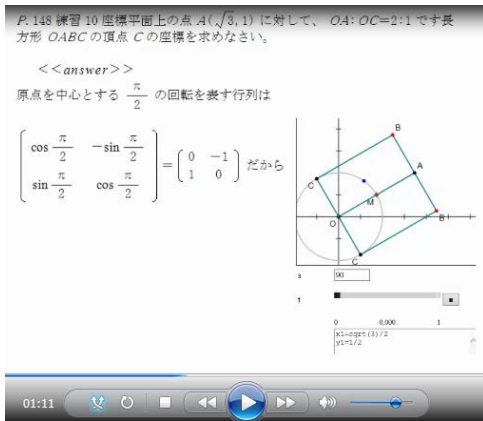


図 16. 応用問題の解説動画

そして、動画の中で用いたアプリは全て学生に提供し、動画の内容を自ら確かめることができるようにしている。(図 17)

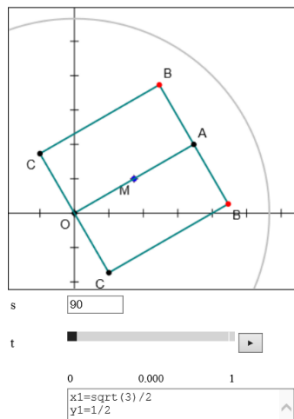


図 17. 動画で用いたアプリ

3. おわりに

参考文献([7])の実践例では、プログラミングの能力の高い数名の中学生に事前にプログラムを作成させ、授業ではその結果を用いてアニメーションを提示する方式をとっている。

筆者の研究では、生徒全員がそれぞれプログラムを入力し、その結果を見ながらリアルタイムでプログラムを修正するという作業を継続して行い、その過程で深い学びの実現を目指すものである。

現時点ではまだプログラミングの能力が高い生徒の数は限られているため、この授業で利用できるプログラムは数行程度の簡単なものに限定した。将来的に小学校と中学校でプログラミング教育を受けた優秀な学生が多数入学してくるようになれば、より高度なプログラミングを必要とする教材を用いた授業を行ってゆきたい。

なお、本研究は日本学術振興会の科学研究費(課題番号 16K00993)“スマートデバイスによる動画再生を活用する高専数学の実践的研究”の補助を受けて行われた。

参考文献

- (1) 高木和久: 学習者のプログラミングのスキルを生かした数学の授業について、日本数学教育学会第 50 回秋期研究大会発表集録 PP. 437-440 (2017)
- (2) 高木和久: ホームページ
<http://www.ge.kochi-ct.ac.jp/~ktakagi/>
 (2018.2.6 最終確認)
- (3) 高木和久: 動的オブジェクトを活用した数学の授業について、日本数学教育学会誌第 99 回大会特集号 P. 558 (2017)
- (4) 高木和久: 動画や動的オブジェクトを含む数学の CBT 問題の試作、教育システム情報学会研究報告 vol. 31 No. 4, PP. 7-12 (2016)
- (5) 高木和久: タートルグラフィックスを用いた双方向的なグラフ描画ソフトについて、教育システム情報学会研究報告 vol. 28, No. 2 PP. 107-112 (2013)
- (6) 高木和久: 関数のグラフの双方向的なアニメーションの作成について、日本高専学会第 19 回年会講演会講演論文集 PP. 35-36 (2013)
- (7) 上出吉則、辰巳丈夫、村上裕子: プログラミングの算数数学教育での効果と検証 - 生徒の創作した Scratch プログラム教材を授業で活かす -、情報処理学会情報教育シンポジウム 2017
- (8) 西脇康雅、柘植直樹、河崎哲嗣: サイクロイド曲線を題材とする高校数学における教材開発と実践、岐阜数学教育研究 vol.13 PP.78-100 (2014)