

線形代数における計算アルゴリズム学習支援システム の開発と評価

田中円^{*1}, 樋口三郎^{*2}

^{*1} 龍谷大学大学院 理工学研究科

^{*2} 龍谷大学 理工学部

Development and Evaluation of a Tangible Learning Support System for Algorithms in Linear Algebra

Madoka Tanaka^{*1}, Saburo Higuchi^{*2}

^{*1} Graduate School of Science and Technology, Ryukoku University

^{*2} Faculty of Science and Technology, Ryukoku University

大学理工系学部低年次で学ぶ線形代数には、行列が入力されたとき、行基本変形と呼ばれる基本的操作を特定の順序で行って得られる出力を返す形のアルゴリズムが多く存在する。従来このようなアルゴリズムの学習は、学習者が入力例に対して紙上で操作を練習することで行われることが多かった。学習者の非本質的な計算ミスなどを防ぎ、学習過程を記録するとともに適切なアドバイスを自動的に与える、Web上で動作する学習支援システムを提案し、学習者の詳細な状態を取得する機能について、予備的評価の結果を報告する。

キーワード: eラーニング, 数学オンラインテスト, 線形代数, チュータリングシステム

1. はじめに

数学オンラインテストとは、教授者の定めた確率に従ってランダムに数学の問題を出題し、学習者に一定の文法に従った解答を入力させ、数学的な同値性に基づいて数式処理システムで自動的に採点を行う学習支援システムのことである⁽¹⁾。数学の学習・評価を数学オンラインテストで行う例が増えている⁽²⁾。

数学オンラインテストは、多肢選択式のテストと異なり、学習者が数式を構成して答えるという特徴があり、検証だけでなく構成の能力を正確に測定できるとされる⁽³⁾。一方、従来の数学オンラインテストには、構成の最終的な結果のみの入力を求めることが多く、過程の記述を自動採点することまではできないことが多い。例えば、ある関数の不定積分を求めよ、という問題を例に考えよう。典型的な数学オンラインテストでは、最終的な不定積分の入力を空欄に入力させる。過程を評価するには、日本語と数式の過程を問題文と

して与え、その中に数式を書くべき空欄を設け、例えば変数を置換した直後の被積分関数の形を入力させる、などすることが可能である。この途中の空欄への解答により学習者が過程を正しくたどっているかどうかを判定することはある程度可能である。しかし、別の変数変換の過程をたどって正しい不定積分に到達した学習者を正しく評価できない可能性がある。従来型の紙のテストでは、過程を学習者に自由記述させ、教授者が正誤を判定する。これは学習者の自由な思考過程を正しく評価できるが、採点のコストは高い。自由記述答案を入力として受け取って、過程を自動的に判定する試み⁽⁴⁾もあるが、一般の教授者が利用できるような普及したシステムはまだ存在しない。

紙への自由記述答案は多くの情報を含むが、通常の筆記試験では、提出された答案は、学習者が鉛筆と消しゴムで記入消去を繰り返して完成させた最終的な版のみを採点対象とする。これに対し、答案作成過程

を時系列で観察できるとすると、評価であれば学習者の理解の状況をより正確に知ることが可能である。また学習であれば答案作成中に教授者の介入を許すことで効果的な学習を行える可能性がある。

ここでは、理工系高等教育の基礎的な科目である線形代数の分野に注目する。ここではベクトル、行列、あるいは抽象的な線形空間の元や線形変換が主な数学的対象である。また、線形代数では、計算問題を実例としてアルゴリズムを学ぶことがある。具体的には、行基本変形と呼ばれる行列の基本的な書き替え操作を、適切な順序で行うことにより目的を達成する、行列の簡約化、ガウスの消去法、行列式の計算などのアルゴリズムがある。これらのアルゴリズムの詳細を理解するのに、具体的な行列に対して繰り返しアルゴリズムを手計算で適用するというアプローチをとる教科書⁽⁵⁾⁽⁶⁾がある。

しかし、これを紙上で実行すると単純な計算ミスが多発し、学習者の学習意欲を阻害し、本質的な理解を妨げてしまう、という状況が起きることがある。しかしこの問題は操作をデジタルに行えば解消される。ベクトルや行列は離散的な単純な構造であり、数式処理に習熟していない学習者がデジタルに過程まで含めて入力すること、過程を自動的に分析することが可能である。

そこで、先行研究⁽⁷⁾を基に、学習者が行基本変形を1単位の操作として、アルゴリズムにしたがって繰り返し実行し、その操作からシステムが学習者の状態を推定し、それに即したアドバイスや学習指示を行うというシステムを構築することを構想した。

その準備として、著者らは線形代数の行基本変形を適切な順序での実行で構成されるアルゴリズムについて、学習支援システムを開発し、評価を行ってきた。⁽⁸⁾では、学習者が行基本変形を入力する基本的な機能を実装して、利用者による評価を行った。⁽⁹⁾では、オンラインチュータリングの原型として、ヒントを出す機能を実装して、評価を行った。これらの評価は、いずれも線形代数の当該部分をすでに理解している理工系大学高学年の学生を被験者としたものである。

今回、同システムを、線形代数の学習中である理工系低学年生に使用させ評価したのでその結果を報告する。また、学習者集団及び各学習者の行動を統計的

に集約して表示する機能を開発して、得られたデータに対して試用して評価した。この機能は、教授者が学習者の状態を集約して知る機能の原型となるものであり、また、個々の学習者の状態に応じた自動的なチュータリングを行う機能の要素となりうるものである。

2. 線形代数における行基本変形

ここでは、線形代数における行基本変形と、それを構成要素として組み立てられるアルゴリズムについて説明する。

2.1 行基本変形

行列とは、数を縦横の長方形に並べたものである。横の並びを行、縦の並びを列という。個々の数を成分という。行列の行基本変形とは、次の4つの操作である⁽⁵⁾⁽⁶⁾。

- ある行に別の行の定数倍を加える
- ある行から別の行の定数倍を引く
- 2つの行を入れ替える
- ある行を0でない定数倍する

2.2 ガウスの消去法

線形代数のアルゴリズムには、与えられた行列に対して決まった順序で行基本変形を行い、最終的な行列を出力するという形で記述されるものがある。その典型として、与えられた行列の一意な行簡約形を求めるガウスの消去法のアルゴリズムがある。このアルゴリズムには2つのフェイズがあり、前半は前進消去、後半を後退消去とよぶ。いずれも、一定の順序で行基本変形を行うという形で実施する。この一連のアルゴリズムに沿った行列の操作を、ガウスの消去法と呼ぶ⁽⁵⁾⁽⁶⁾。

前進消去フェイズにおいては、その時点で注目すべき、ピボットと呼ばれる成分がある。

行列の行簡約行列を求めることは、その行列を係数行列とする連立1次方程式系の解を決定することに等しく、応用上重要である。多くの線形代数や数値計算の教科書は、ガウスの消去法のアルゴリズムを手で実行できることを学習目標のひとつとしているとみなせる⁽⁵⁾⁽⁶⁾。

今回の実験では、アルゴリズムの中でも、ガウス

の消去法を学習目標とした。

3. システムの概要

本システムは Web サーバ上で動作し、学習者は PC 用 Web ブラウザで利用する。入力ページと計算ページで構成される。

操作履歴、および行列のサイズや成分は、データベースに記録される。

3.1 入力ページ

入力ページでは、アルゴリズムを適用する行列のサイズと学籍番号を学習者が入力する。その後、自動的に計算ページへ移動する。

3.2 計算ページ

計算ページでは、学習者が行列の成分を入力し、行基本変形を繰り返して計算を行う。成分や定数倍の値は有理数の範囲である。行基本変形の回数を数えるとき、1つの操作を1ステップと呼ぶ。学習者は特定のボタンを押すことによってアルゴリズムが終了を報告する。

3.2.1 Undo 機能

「元に戻す」ボタンを押すことで、現在の行列を1ステップ前の状態に戻すことができる。何度も使用することができ、入力直後の行列まで戻すことが可能である。なお、行基本変形は可逆であるので、4つの操作を利用しても1ステップ前の状態に戻すことができるが、学習者の作業の容易さ、および、「戻す」意図の記録のために独立した機能として実装した。



図1 計算ページ

3.2.2 ヒント機能

操作を行った直後に、あらかじめ用意した候補から選択して自動的にアルゴリズムに即して次に行うべき操作を示唆するヒントを計算ページ下部に出力する。さらに、学習者が「ヒント」ボタンを押すと、上記のヒントに対応した追加ヒントを出力する。本機能は、アルゴリズムの学習に際して、足場架けとなることを意図しているが、現時点では、学習者の状態に応じてヒントの内容を変化させる、足場をはずすような機能は持っていない。

3.3 学習記録ページ

学習者が入力ページ、計算ページを使用した際、ページ上の行動、すなわち行列に対して行った一連の行基本変形が時刻とともに記録される。また、表示したヒント、追加ヒントが記録される。

また、計算ページにて学習者が最後に操作した時点までの計算過程を表示する機能がある。その際表示されるページを図2図3に示す。この機能は学習者が行った操作を学習者・教授者が、特定の学習者の記録を参照するための機能である。

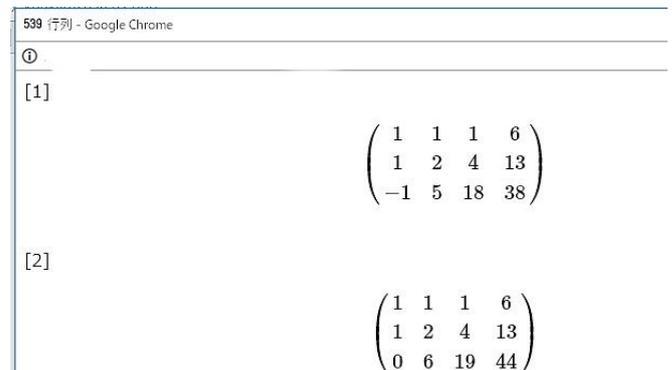


図2 学習記録ページでの変形過程の表示



- [1] 行列を入力しました
- [2] 0行から2行へ 1/1倍+
- [3] 0行から1行へ 1/1倍-
- [4] 1行から2行へ 6/1倍-
- [5] 2行から1行へ 3/1倍-
- [6] 1行から0行へ 1/1倍-
- [7] 2行から0行へ 1/1倍-

図3 学習記録ページでの操作過程の表示

4. 実験

4.1 実験の概要

本システムを用いて、有理数を成分とした行列の入力に対して、ガウスの消去法によって行簡約行列を求めるアルゴリズムを、被験者が学習する実験を行った。被験者は19名の理工系大学1年生で、1年前期に週2講時3単位の線形代数の科目を履修済みで、行基本変形とガウスの消去法をすでに学習している。

4.2 ヒントの内容

正しいアルゴリズム進行段階に応じて、次のようなヒントを表示した。

- ▶ 前進消去しなさい
- ▶ 後退消去しなさい
- ▶ 入れ替えをしなさい
- ▶ ピボットの値は大丈夫？

また、追加ヒントの内容は、当初のヒントを成分に言及して詳細化するもので、以下の通りである。

- ▶ ピボットより下の成分を0にしよう
- ▶ ピボットより上の成分を0にしよう
- ▶ ピボットの値が0だとだめだよ
- ▶ ピボットの値を1にしよう

4.3 実験の手順

次の手順で実験を行った。

1. 行列の基本事項及び行基本変形、行列の簡約化、及びを説明した紙の資料を渡し、読むように指示する。
2. 本システムの操作方法を説明した紙の資料を渡し、読むように指示する。
3. PCのブラウザでシステムにアクセスし、1問の操作練習問題(図4)を例に、紙の資料で説明された操作を試すように指示する。
4. PCのブラウザでシステムにアクセスし、3問の評価用問題(図5)について、行列の簡約化として説明されたアルゴリズムをシステム上で実行するように指示する。
5. 質問紙調査を行う。

図4は操作練習問題、図5は評価用問題である。

行列の入力練習

問1 以下の行列をガウスの消去法を用いて簡約化行列に変形させよ。

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

なお、操作を間違えた場合は、「元に戻す」ボタンを活用してください。

図4 操作練習問題

行列の本番問題

問1 以下の行列をガウスの消去法を用いて簡約化行列に変形させよ。

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 4 & 13 \\ -1 & 5 & 18 & 38 \end{pmatrix}$$

問2 以下の行列をガウスの消去法を用いて簡約化行列に変形させよ

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 15 \\ 4 & 6 & 3 & 41 \\ 8 & 8 & 9 & 83 \\ 2 & 3 & 3 & 25 \end{pmatrix}$$

問3 以下の行列をガウスの消去法を用いて簡約化行列に変形させよ。

$$\begin{pmatrix} 4 & 4 & -6 & -24 \\ 6 & 8 & -13 & -60 \\ 2 & 2 & -3 & -12 \\ -4 & -3 & 4 & 12 \end{pmatrix}$$

なお、全ての問題において、操作を間違えた場合は、「元に戻す」ボタンを活用してください。

図5 評価用問題

5. 実験結果

5.1 ヒント機能の使用

データベースに記録されたヒントの使用履歴を調査したところ、アルゴリズムに従っていない手順の途中で、追加ヒントボタンを押し、アルゴリズムに従った手順に復帰したケースは観察できなかった。学習者の誤解を正すには、現在のヒントや追加ヒントの表示だけでは不十分である可能性がある。学習者がそのままでは操作を続けられなくなるような介入が必要である可能性がある。

5.2 ステップ数の分布

最終的に送信された出力の行列が、アルゴリズムの出力と一致している場合でも、アルゴリズムを正確に実行しているとは限らない。むしろ、途中の何段階かで間違い、修正して正しい出力に到達するケースが一般的であることが、操作過程の記録および学習記録ページの表示からわかった。

学習者のアルゴリズムに対する理解の程度を示す指標として、次の2つのステップ超過率が考えられる。

$$r = \frac{(\text{学習者の要したステップ数})}{(\text{アルゴリズムに従ったときに要するステップ数})} - 1$$

$$r_u = \frac{(\text{学習者の要したステップ数}) - 2 \times (\text{Undo ステップ数})}{(\text{アルゴリズムに従ったときに要するステップ数})} - 1$$

Undo 操作を除いたステップ超過率 r_u は、学習者が鉛筆と消しゴムを使って紙上にすべての過程を記述したとき、アルゴリズムに従ったときのステップ数の何倍超過するかを示す比率である。2×(Undo ステップ数)が、消しゴムの使用、および消しゴムによって消された操作の個数に相当する。学習者が、消しゴムによる修正後に、アルゴリズムに完全に従った過程を書いたなら、この比率は0となり、無駄な操作が多いほどこの比率は正で大きくなる。

一方、Undo 操作を含んだステップ超過率 r は、消しゴムの使用や、そのまえに試みた操作の個数まで考慮したときの、無駄な操作の比率である。これは紙上への記述では測定できない。

評価用問題 2, 3 で、アルゴリズムの正しい出力を得た 11 名の被験者について、 r_u, r のそれぞれを 2 問について散布図に表したのが図 6, 7 である。比率 r_u, r を用いると、正しい出力を得た場合にも、アルゴリズムを正しく実行しているかどうか、実行中の誤りと訂正がどのくらいあるか、を測定できることがわかる。

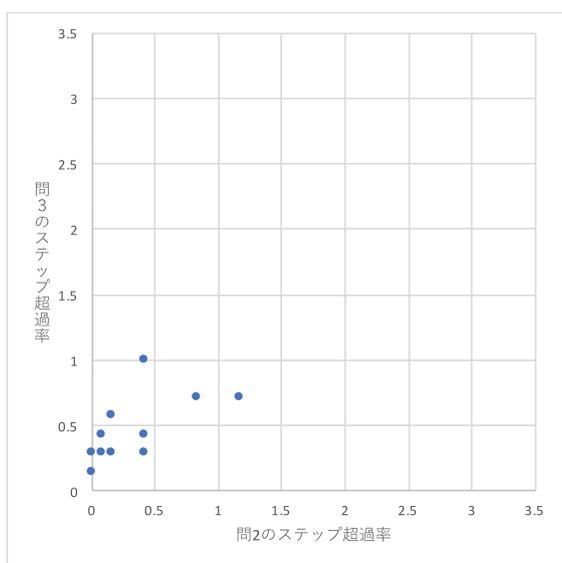


図 6 問 2 問 3 の Undo 操作を除いたステップ超過率 r_u

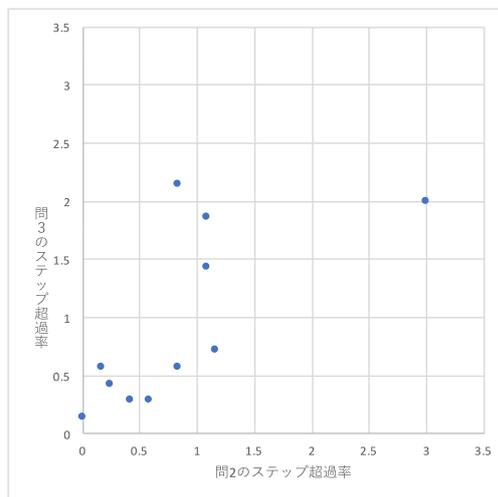


図 7 問 2 問 3 の Undo 操作を含むステップ超過率 r

5.3 質問紙調査

操作性についての質問紙調査の結果を表 1 に示す。被験者は使用に困難を感じなかったことが示唆される。

表 1 学習後の質問紙調査.

とてもあてはまる(4)~とても当てはまらない(1)の 4 件法. N=19

	AV	SD
使用方法は理解しやすい	3.68	0.46
操作はしやすい	3.58	0.49
同じ問題に取り組むとき、もう一度このアプリを使いたい	3.53	0.50

6. 考察

開発したシステムは、被験者に困難なく使用された。追加ヒント機能が使用された頻度は低く、ヒントにより学習者の誤解を正す役目は果たせていない可能性がある。学習者に対して効果的な介入を行うには、一時的に学習者の誤った自由な操作を妨げるなどの方法がありうる。

システムに記録された使用記録は、紙の答案よりも詳細な分析を可能にすることが実証された。蓄積されたデータから有用な指標を構築することは今後の課題である。

このシステムは、他のアルゴリズム、例えば行基

本変形による行列式の値の計算アルゴリズムの学習にも応用できると考えられる。その実装と適切なヒントの選択、実践も今後の課題である。

一般に、高等教育における数学の中で、代数学分野、例えば論理代数や抽象代数における計算問題は、構造の単純さを反映して、数式処理に習熟していない学習者自身が過程をデジタルな形で入力できる可能性がある。これらの分野に対しても、このようなシステムは有用である可能性がある。

参 考 文 献

- (1) 中村泰之, 秋山實: “STACK と Moodle による数学 e ラーニング”, 数理解析研究所講究録 Vol. 1735, pp. 9-15 (2011)
- (2) 岸田隆, et al. : “線形代数の概念的 understanding における仮説検証型教育システムの効果 (1) ”, 日本教育心理学会総会発表論文集 46 p. 186 (2004)
- (3) Christopher Sangwin and Ian Jones: “Asymmetry in student achievement on multiple-choice and constructed-response items in reversible mathematics processes”, Educational Studies in Mathematics, Vol. 94, Issue 2, pp. 205-222(2017)
- (4) 中川正樹: “記述式解答の機械認識による採点支援と自動採点”, 情報処理学会研究報告 Vol. 2016-CE-137, No. 7, pp. 1-3 対馬勝英, 加賀英徳, 中村勝則: “数式処理における DMI 機能の実現”, CAI 学会誌, Vol. 7, No. 2, pp. 43-53 (1990)
- (5) 松本和一郎: “線形代数入門 理論と計算法 徹底ガイド”, 共立出版 (2007)
- (6) 薩摩順吉, 四ツ谷晶二: “キーポイント線形代数”, 共立出版 (1992)
- (7) 池田政裕: “行列の行基本変形支援 web アプリケーション”, 龍谷大学理工学部数理情報学科 2015 年度卒業論文, (2015)
- (8) 田中円, 樋口三郎: “線形代数における行基本変形学習支援システム”, 教育システム情報学会関西支部学生研究発表会予稿集 pp. 69-70 (2017)
- (9) 田中円, 樋口三郎: “行基本変形学習支援システムの改良”, 2017 PC カンファレンス論文集, pp. 69-70 (2017)