

高校数学の様々な単元に関する 動画教材の作成と配布について

高木和久
高知工業高等専門学校

Lessons of Mathematics with animations

Kazuhisa TAKAGI
National Institute of Technology, Kochi college

BASIC was once a very popular computer language, but now many people think it is outdated. A few years ago Microsoft released a new language Small Basic. It is a very easy language for beginners just as BASIC was. I made several animations of mathematical contents by Small Basic. By capturing computer display, I made MP4 movies and put them on a server. Students are able to download them to their mobile devices at their free will and they can study mathematics by watching movies at home.

キーワード:Microsoft Small Basic、タートルグラフィックス、スマートデバイス

1. はじめに

OS が MS-DOS の時代には多くの初心者が BASIC を用いてゲームやグラフィックスのプログラミングを楽しんでいた。その後 Windows が OS の主流となり、Windows 環境でグラフィックスができる言語がいくつか現れたが、これらは初心者には難易度が高いものであった。

Microsoft は 2010 年に Small Basic 1.0 をフリーソフトとして公開した。この言語はかつての BASIC のようにグラフィックスを扱うプログラムを初心者でも簡単に作ることができるものである。

この Small Basic を用いて数学の様々な単元に関するプログラムを作成した。そしてそのプログラムをパソコン上で起動し、音声で解説を加えながら画面をキャプチャして MP4 形式の動画を作成した。

Small Basic ではタートルグラフィックスを利用することができる。タートルグラフィックスはプログラミング言語 LOGO など実装されている機能で、画面上に表示される亀の形のカーソルを簡単なコマンドを用いて操作してディスプレイに図形を描画するものであり、単に円や直線が移動するよりもタートルが動く方がより強く学生の興味を引く効果があった。

2. 作成した教材の例

この章では今回作成した教材の一部を紹介する。その内容は数学の様々な単元にわたっている。

2.1 媒介変数で表わされた直線

例題 (1) 媒介変数 t を用いて、直線が

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \end{cases}$$

と表わされている。 t を消去して直線の方程式を求めよ。

(2) 媒介変数 t を用いて

$$\begin{cases} x = 1 + t^2 \\ y = 2 - t^2 \end{cases}$$

と表わされる直線と(1)の直線は同じ直線か。

t を消去して直線の方程式を求めるとどちらも

$y = 3 - x$ となるが、

$$x = 1 + t^2 \geq 1$$

であるから(2)の直線は(1)の直線の一部である。

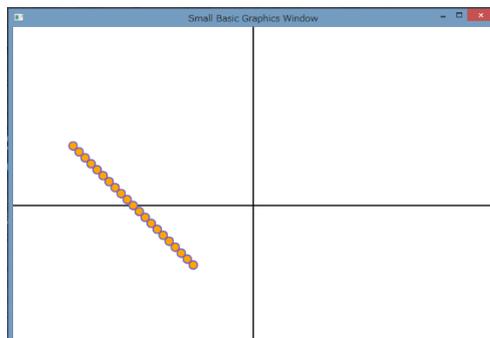


図 1. $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \end{cases}$ の表す直線 ($1 \leq t \leq 2$)

```
1 x0=400
2 y0=300
3 unit=100
4 r=8
5 GraphicsWindow.Width = 2*x0
6 GraphicsWindow.Height = 2*y0
7 GraphicsWindow.DrawLine(0, y0, 2*x0, y0)
8 GraphicsWindow.DrawLine(x0, 0, x0, 2*y0)
9 GraphicsWindow.PenColor = "SlateBlue"
10 GraphicsWindow.BrushColor="Orange"
11 For i=0 To 20 Step 1
12   point[i]=Shapes.AddEllipse(2*r,2*r)
13   t=0.1*i
14   x=unit*(1+t)
15   y=unit*(2+t)
16   Shapes.Move(point[i],x-r,y-r)
17   Shapes.ShowShape(point[i])
18   Program.Delay(200)
19 EndFor
```

図 2. プログラム

媒介変数の考え方は学生にとっては難しいようで、黒板に式を書いて説明するだけではなかなか理解して貰えないことが多い。そこで Small Basic を用いて例題の直線を描くプログラムを作成した。図 1 に実行結果を、図 2 にこのプログラムを示す。

次に、(2)の表す直線を描画した。(図 3) そのプログラムは図 4 に示す通りである。2 つのプログラムは 14 行目と 15 行目のみが異なる。

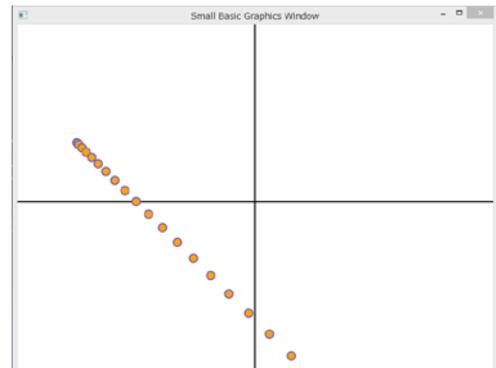


図 3. $\begin{cases} x = 1 + t^2 \\ y = 2 - t^2 \end{cases}$ の表す直線 ($1 \leq t \leq 2$)

```
1 x0=400
2 y0=300
3 unit=100
4 r=8
5 GraphicsWindow.Width = 2*x0
6 GraphicsWindow.Height = 2*y0
7 GraphicsWindow.DrawLine(0, y0, 2*x0, y0)
8 GraphicsWindow.DrawLine(x0, 0, x0, 2*y0)
9 GraphicsWindow.PenColor = "SlateBlue"
10 GraphicsWindow.BrushColor="Orange"
11 For i=0 To 20 Step 1
12   point[i]=Shapes.AddEllipse(2*r,2*r)
13   t=0.1*i
14   x=unit*(1+t*t)
15   y=unit*(2+t*t)
16   Shapes.Move(point[i],x-r,y-r)
17   Shapes.ShowShape(point[i])
18   Program.Delay(200)
19 EndFor
```

図 4. プログラム

図 1 と図 3 を見比べると、直線(1)では描かれている点が等間隔に並んでいるが、直線(2)の方は t の値が大きくなるにつれて点の間隔が大きくなっている。この現象を指摘し、学生にその理由を考察させた。

11 行目の For 文の中で t を 0.1 刻みで変化させているので(1)で描かれる点は等間隔に並ぶ。しかし(2)では x, y ともに t^2 を用いて定義されているので描かれる点は等間隔にはならない。学生の反応を見ると、ほとんどの学生が等間隔にならない理由を理解していた。

2.2 3乗根

3乗根について説明する次のようなアニメーション教材を作成した。このプログラムを起動するとまず図5の画面が現れ、3秒後に図6の画面となる。

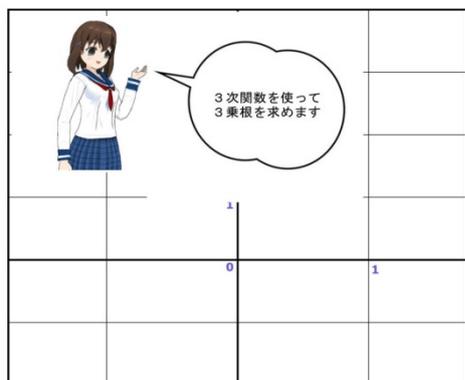


図5. 最初に現れる画面



図6. 台詞が変化する

3秒後に吹き出しが消え、 $y = x^3$ のグラフが左からゆっくり描画される。

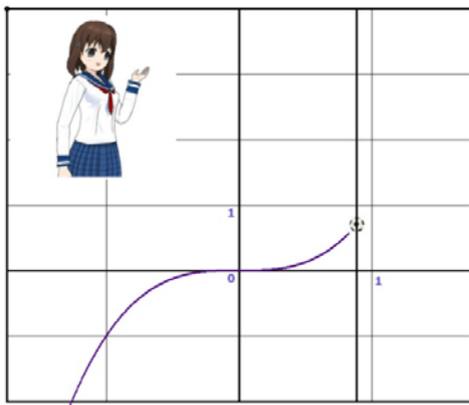


図7. $y = x^3$ のグラフが描画される

この後画面上にタートルが出現し(図8)ユーザーのマウスによる操作が可能となる。

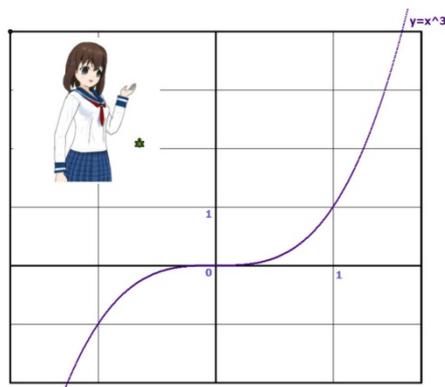


図8. タートルが出現する

マウスでy軸をクリックすると、タートルがその点に移動し、y座標が表示される。タートルはそのまま水平に移動し、 $y = x^3$ のグラフまで達すると向きを変えてx軸に到達して止まる。(図9) このときタートルがいる点のx座標が表示されるが、この値がさきほどのy座標の3乗根である。(図10)

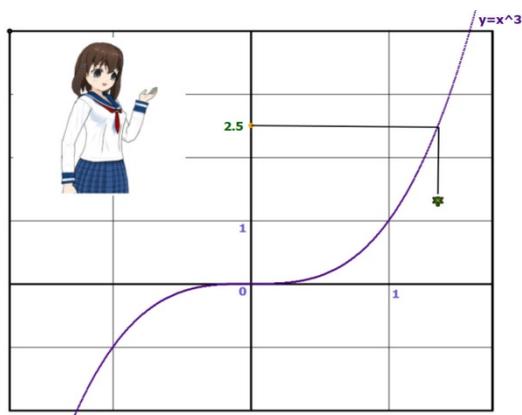


図9. タートルが移動中

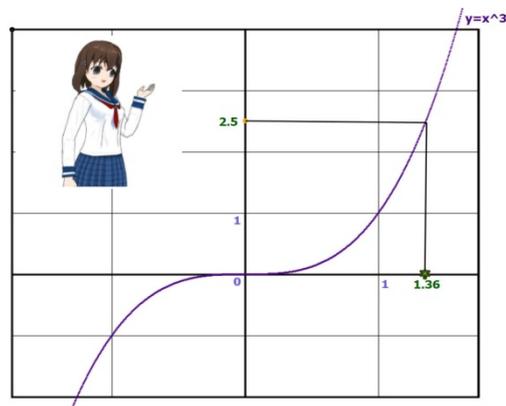


図10. 2.5の3乗根を示した

この操作は何回でも繰り返すことができる。

(図 11, 12)

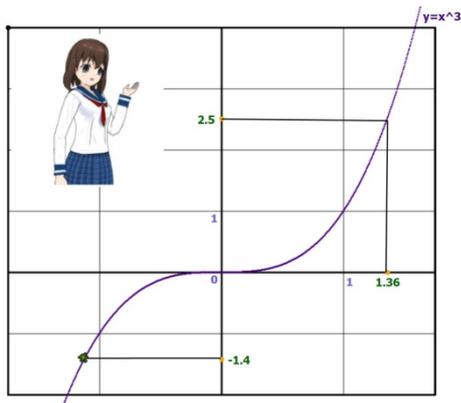


図 11. 引き続き -1.4 の 3 乗根を求める

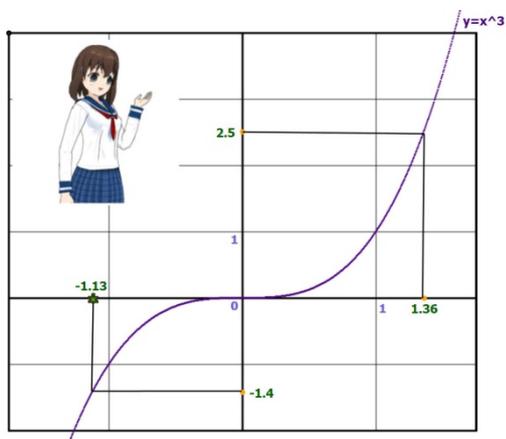


図 12. -1.4 の 3 乗根を示した

2.3 2 次関数の平行移動

2 次関数のグラフは放物線で、 $y = a(x - p)^2 + q$ のグラフは $y = ax^2$ のグラフを x 軸方向に p 、 y 軸方向に q だけ平行移動したものである。これを視覚的にわかりやすく説明するアニメーションを作成した。

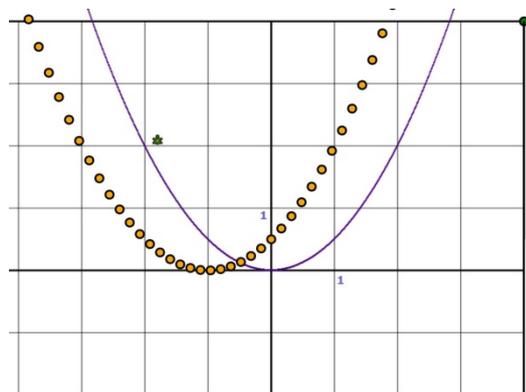


図 13. $y = x^2, y = (x + 1)^2$ のグラフが描かれる

タートルはグラフ上の点に到達したあと、プログラムで記述された平行移動（この場合は右に 1）を行う。(図 14)

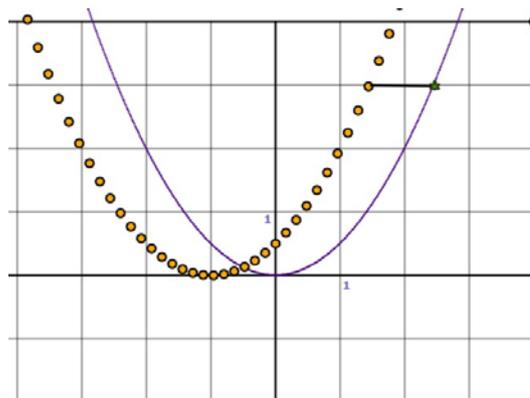


図 14. タートルが右に 1 平行移動する

タートルが平行移動して停止した後、 $y = (x + 1)^2$ のグラフ上の点が一斉に、タートルと同じく右に 1 平行移動する。(図 15)

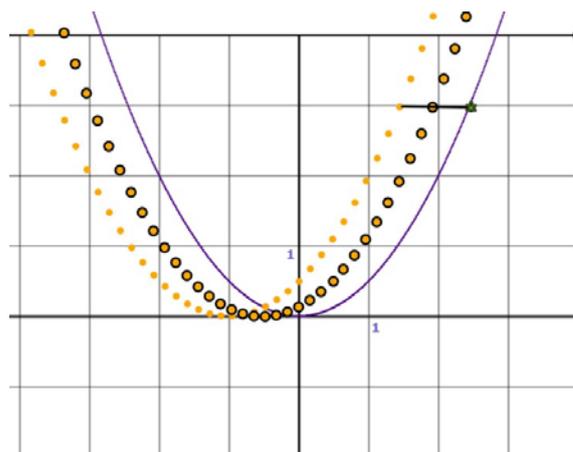


図 15. $y = (x + 1)^2$ のグラフも右に 1 平行移動する

平行移動後の 2 つのグラフが重なる(図 16) ことから、 $y = (x + 1)^2$ のグラフを右に 1 平行移動させると $y = x^2$ のグラフとなることがわかる。

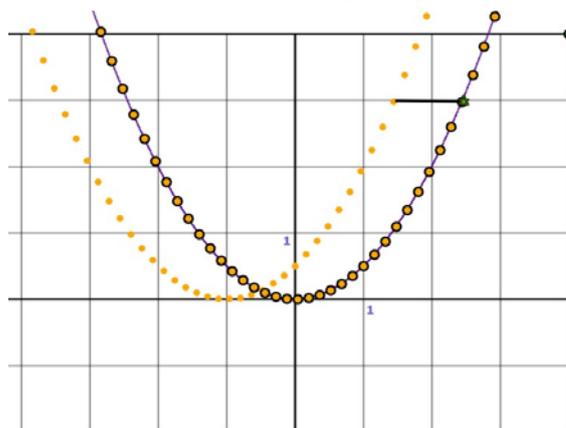


図 16. 2 つのグラフは重なる

2.4 逆関数

関数 $y = f(x)$ がその定義域で 1 対 1 であるとき、 y に対して x を対応させる関数を考えることができ、この関数を元の関数の逆関数という

高等学校の数学では多くの逆関数が登場する。2 次関数 $y = x^2$ の逆関数は無理関数 $y = \sqrt{x}$ であり、指数関数 $y = a^x$ の逆関数は対数関数 $y = \log_a x$ である。

元の関数のグラフと逆関数のグラフは直線 $y = x$ に関して対称である。このことを視覚的に説明するアニメーションを作成した。プログラムを起動すると、 $y = 2^x$ のグラフと直線 $y = x$ が描かれる。(図 17)

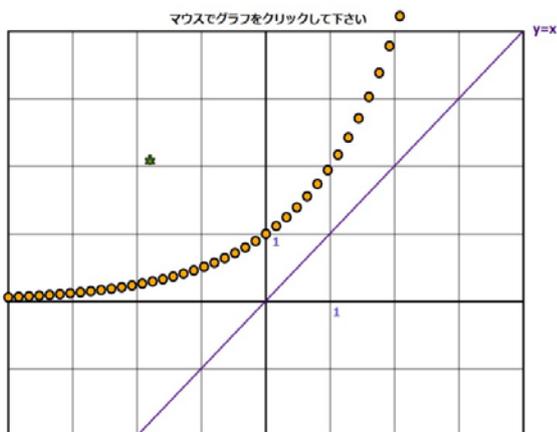


図 17. $y = 2^x$ のグラフと直線 $y = x$

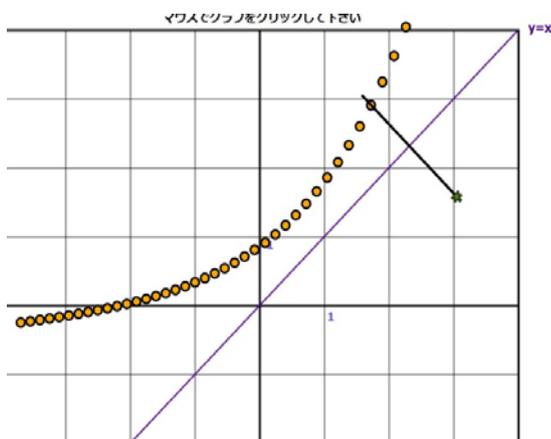


図 18. タートルが直線 $y = x$ に関して対称移動する

$y = 2^x$ のグラフ上の点をマウスでクリックすると、タートルがその点に向かって移動する。タートルはグラフ上の点に到達したあと、直線 $y = x$ に関して対称な点まで移動する。(図 18)

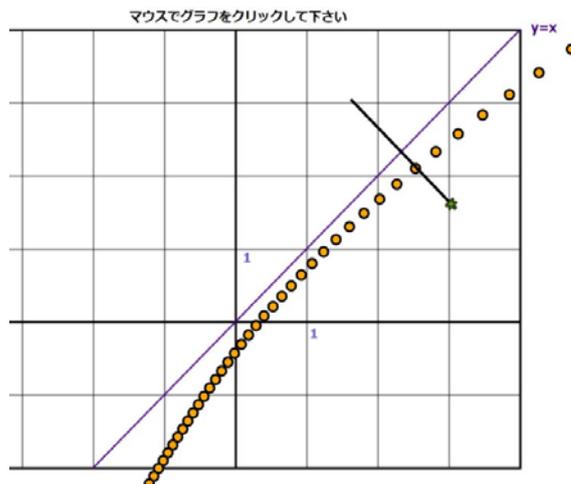


図 19. グラフもタートルの後を追う

$y = 2^x$ のグラフ上の点も、タートルの後を追うように、直線 $y = x$ に関して対称な点まで移動する。

(図 19、20)

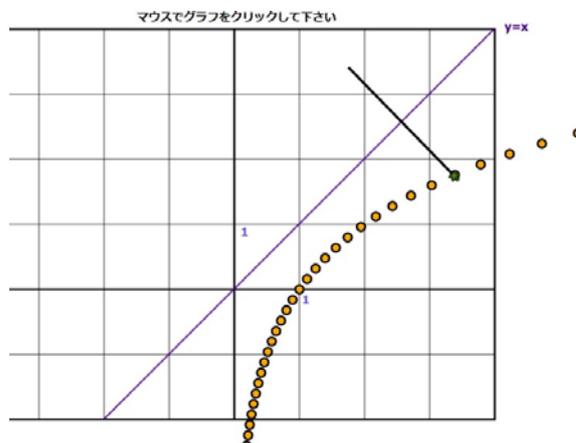


図 20. グラフも直線 $y = x$ に関して対称に移動する

このアニメーションにより、対数関数 $y = \log_2 x$ のグラフは指数関数 $y = 2^x$ のグラフと直線 $y = x$ に関して対称であることが直観的に理解できる。

2.5 二項定理の係数

二項定理の係数をマウスでクリックしながら決定してゆくアニメーションを作成した。

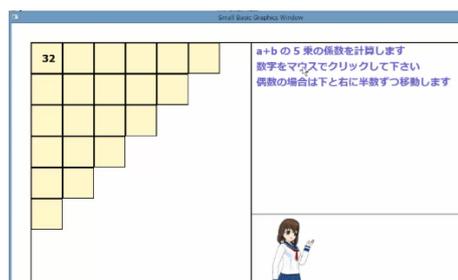


図 21. 最初に表示される画面

マウスで枠をクリックすると枠の中の数が右と下の枠に半数ずつ加えられる。

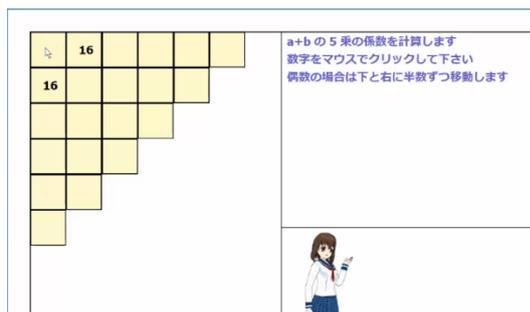


図 22. 32 が 16 ずつ 2 つの枠に分かれた

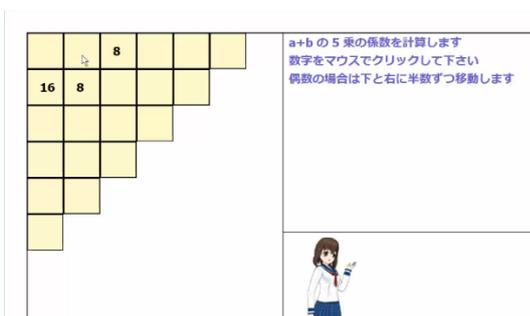


図 23. 右の 16 が 8 と 8 に分かれた

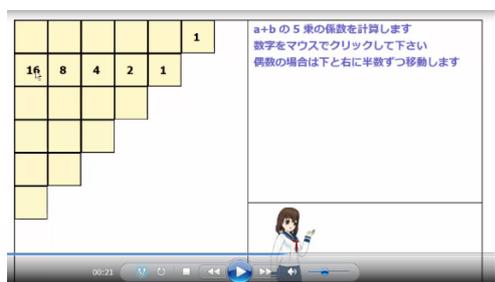


図 24. 更にマウスでクリックしてゆく

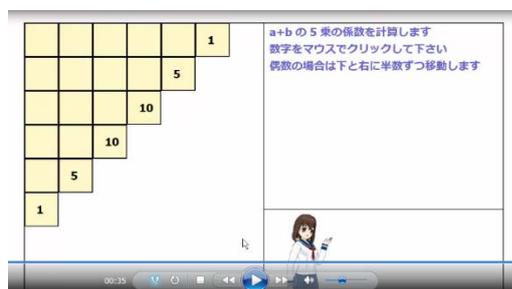


図 25. 最終結果

2.6 アキレスと亀

公比が 0 と 1 との間にある無限等比級数の和が収束する様子をアキレスと亀に例えてアニメーションで見せた。



図 26. 最初に表示される画面

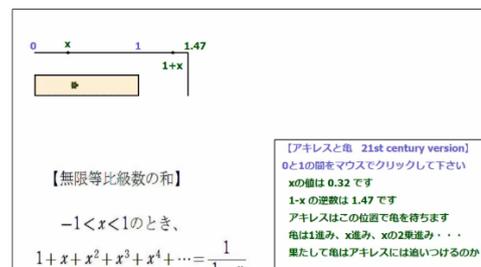


図 27. マウスで線分をクリックした後

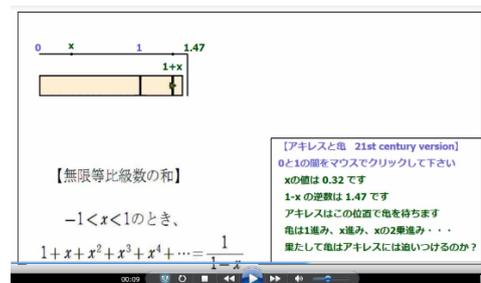


図 28. 亀が進む様子

3. おわりに

ここで紹介した以外にも色々な教材を作成し、授業で利用している。なお、本研究は日本学術振興会の科学研究費(課題番号 16K00993)“スマートデバイスによる動画再生を活用する高専数学の実践的研究”の補助を受けて行われたものである。

参考文献

- (1) 高木和久: “タートルグラフィックスを用いた双方向的なグラフ描画ソフトについて、教育システム情報学会研究報告 vol. 28, No. 2 (2013-7) PP. 107-112 (2013)
- (2) 高木和久: “関数のグラフの双方向的なアニメーションの作成について、日本高専学会第 19 回年会講演会講演論文集 P. 35-36 (2013)
- (3) 高木和久: “電気回路シミュレータを用いた数学の実験”、教育システム情報学会 第 37 回全国大会 (2012)